大　　学

数学系

自学丛书

空间解析几何



KONGJIANJIEXIJIHE

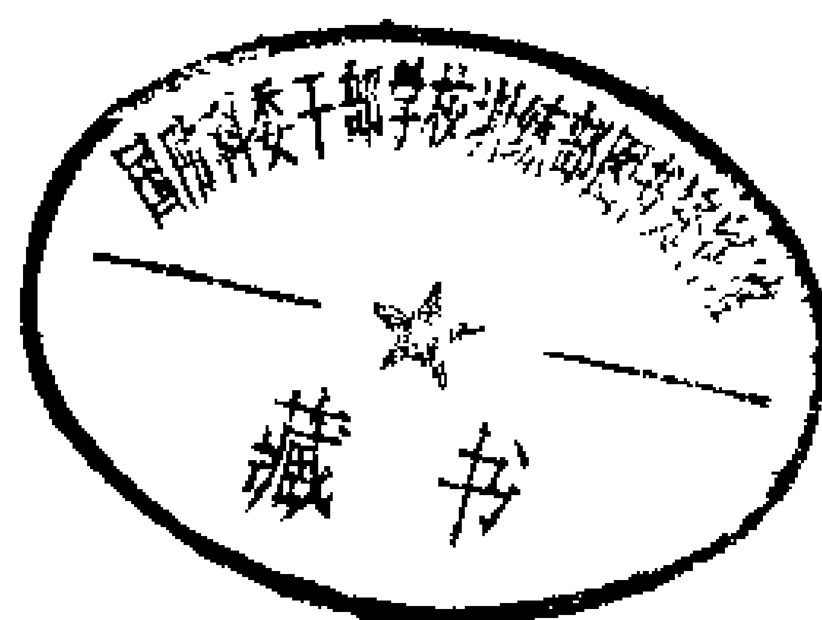


大学数学系自学丛书

空间解析几何

东北师范大学

郭卫中 主编



辽宁人民出版社

一九八二年·沈阳

责任编辑：王鸿宾
封面设计：安今生

空间解析几何
郭卫中　主编
*
辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32　印张：16
字数：420,000　印数：1—23,000
1982年8月第1版　1982年8月第1次印刷
统一书号：7090·198　定价：2.05元

出版说明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　　录

第一部分　空间解析几何讲义

第一章　空间坐标系

空间解析几何和平面解析几何一样，也是由给定的有序数组确定点的位置，且以它为基础研究空间几何图形的一些性质。但它所研究的内容比平面解析几何更加多样和广泛，它不仅研究直线和曲线，而且还要研究平面和曲面。

因为坐标系是研究解析几何的基础，所以在第一章中，我们首先应当建立空间直角坐标系。同时，为了使读者能够对其他坐标系也有某些了解，还要介绍较常用的空间极坐标系和柱面坐标系。

§1　空间直角坐标系

在中学的数学课程中，已经学过直线坐标系（数轴）和平面直角坐标系。空间直角坐标系是它们的一种推广和发展。那末，空间直角坐标系是由哪些条件，怎样建立起来的呢？现在我们就来讨论这个问题。

我们先取交于一点而且互相垂直的三个轴。用O表示它们的交点，用Ox表示第一个轴，Oy表示第二个轴，Oz表示第三个轴。在图中，把字母x,y,z写在对应轴正向的近旁（图1）。

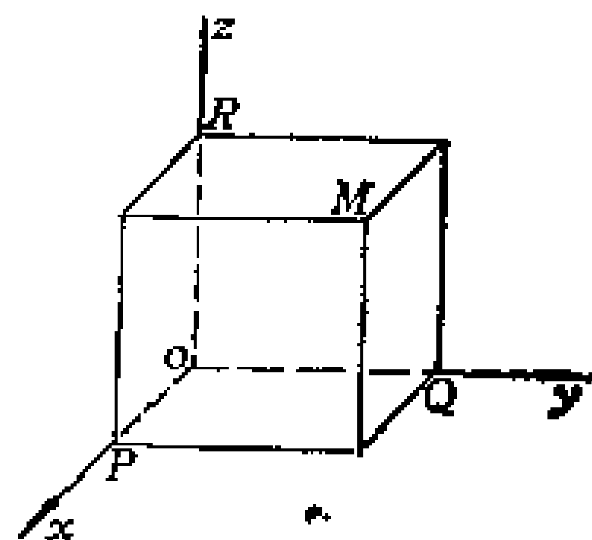


图 1

再取一个线段作为测量长度的

单位，也称测度单位．以O为共同原点，在轴 Ox，Oy，Oz上建立数轴或者说导入坐标系。

设M是空间的任意一点．过点M作平行于平面 Oyz，Ozx 和 Oxy 的平面，用 P,Q 和 R 分别表示这些平面与直线Ox，Oy 和 Oz 的交点，设 x，y 和 z 分别是点 P，Q 和 R 在直线 Ox，Oy 和 Oz 上的坐标系里的坐标．根据直线上点的坐标定义，则 $x=OP$，$y=OQ$，$z=OR$，而 OP，OQ 和 OR分别是直线 Ox，Oy 和 Oz 上有向线段 $\overline{OP},\overline{OQ}$ 和 $\overline{OR}$ 的代数值．因此，对于空间的一个确定点M，则数x,y 和z完全确定。

反之，如果已知一组实数 x,y 和 z，则在直线 Ox，Oy 和 Oz 上分别以 x,y 和 z 为坐标的点 P,Q 和R完全确定。过点 P，Q 和R分别作平行于平面 Oyz，Ozx 和 Oxy 的平面，则这三个平面交于唯一一点M．因此，一组实数 x,y 和 z 在空间确定唯一一点。

由上所述，可以断定，空间的所有点M与全体有序三数组 x,y,z 之间有一一对应关系．建立点和数组间的这种对应，就说在空间导入坐标系，我们把这种坐标系叫做**空间直角坐标系**。空间点M所对应的数组 x,y 和 z 叫做点M的**直角坐标**．数 x 叫做点M的**横坐标**，数 y 叫做**纵坐标**，数 z 叫做**竖坐标**．平面 Oxy，Oyz 和 Ozx 叫做**坐标面**．轴 Ox，Oy 和 Oz 叫做**坐标轴**，Ox 叫做**横轴**，Oy 叫做**纵轴**，Oz 叫做**竖轴**．点O叫做**坐标原点**．由此可见，空间直角坐标系，就由有序的互相垂直的三个坐标轴和一个测度单位完全确定。

空间任意点 M 的坐标，常用 x,y,z 表示，并记作$M(x,y,z)$。

三个坐标面 Oyz，Ozx，Oxy 把整个空间分成八个区域，每个区域都叫做**卦限**（图2）．在轴 Ox 正向，Oy 正向和 Oz 正向的区域叫做**第一卦限**；在轴 Ox 负向，

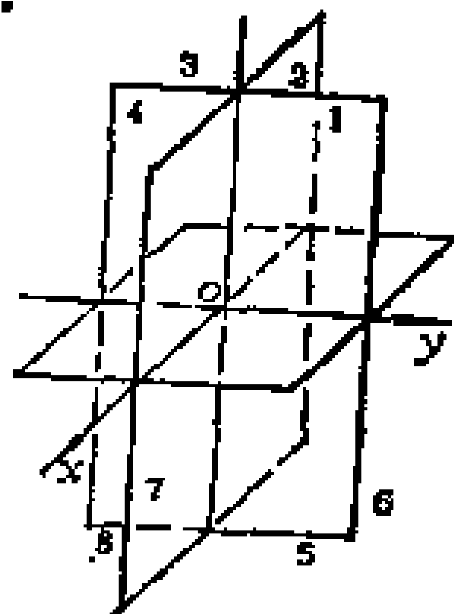


图 2

Oy 正向和Oz 正向的区域叫做第二卦限；在轴 Ox 负向，Oy 负向和 Oz 正向的区域叫做第三卦限；在轴 Ox 正向，Oy 负向和 Oz 正向的区域叫做第四卦限。在第一、二、三、四卦限下面的区域分别叫做第五、六、七、八卦限。

不难看出，点M所在的卦限与它坐标的符号之间有下列关系：

符号 \ 卦限 \ 坐标	一	二	三	四	五	六	七	八
横坐标 x	+	−	−	+	+	−	−	+
纵坐标 y	+	+	−	−	+	+	−	−
竖坐标 z	+	+	+	+	−	−	−	−

显然，平面 Oxy 上每个点的竖坐标都是零；平面 Oyz 上每个点的横坐标都是零；平面Ozx 上每个点的纵坐标都是零。因为坐标原点是三个轴的交点，所以它的三个坐标都是零。

根据点的直角坐标的定义，从上表不难看出对称点坐标之间的符号的变化关系。例如，若点 $M(x,y,z)$是空间的一点，则点 $P(x,y,-z)$是点M关于坐标面 Oxy 的对称点；点 $Q(x,-y,-z)$是点M关于轴 Ox 的对称点；点 $R(-x,-y,-z)$是点M关于坐标原点的对称点。

应当注意，在空间直角坐标系中，如果横轴、纵轴、竖轴的正向恰好如右手拇指、食指、中指所指的方向，则这样的坐标系叫做右旋坐标系，也称右手系（图3）。如果横轴、纵轴、竖轴的正向恰如左手拇指、食指、中指所指的方向，则这样的坐标系叫做左旋坐标系，也称左手系（图4）。在我国，通常采用右旋坐标系。

例1　已知空间一点M的坐标为（3，4，5），试在直角坐标系 $Oxyz$ 中描出它的位置。

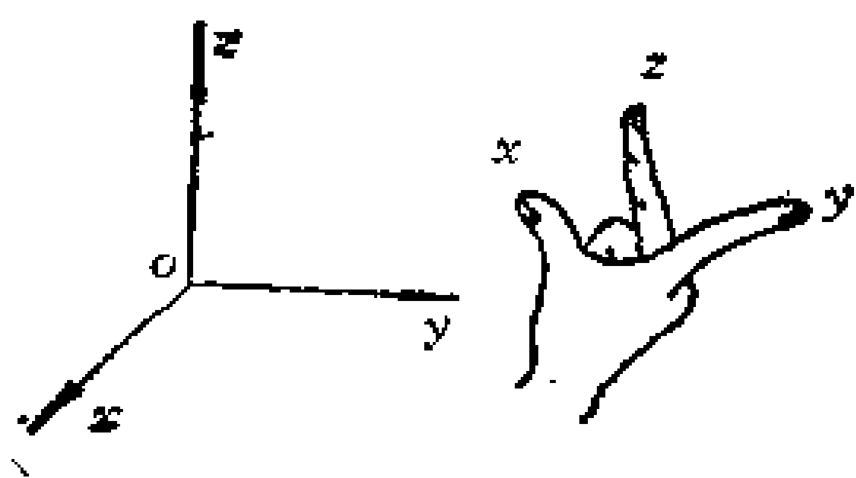


图 3

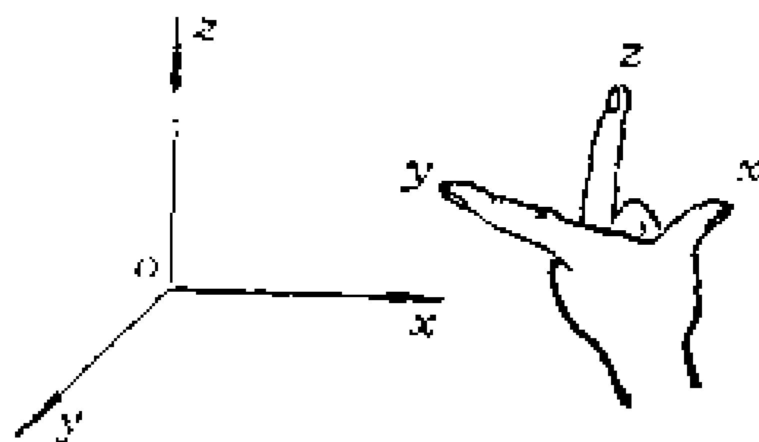


图 4

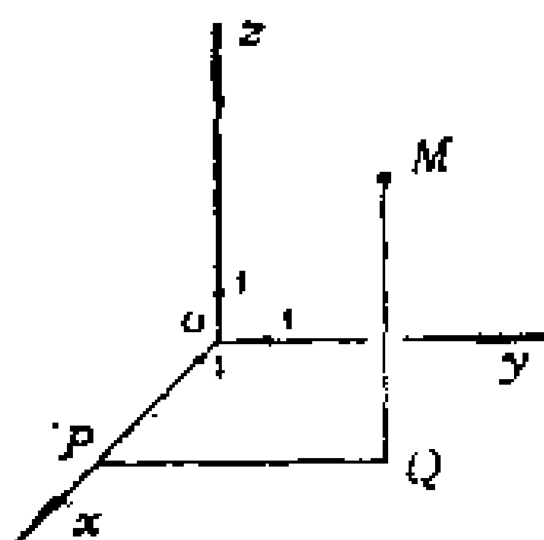


图 5

解　如图5，先在 Ox 轴上确定坐标为 3 的点 P，过点 P 引平行于 Oy 轴的线段 PQ，使其长度为 4，然后再从 Q 点引垂直于 Oxy 坐标面的线段 QM，使其长度为5，则点 M 就是要求描出的位置。

例 2　已知空间一点 M 的坐标为（3，3，2），试描出它关于坐标面 Oxy、坐标轴 Oy 和坐标原点 O 的对称点。

解　根据对称点坐标之间的符号关系，可知点 M 关于 Oxy 坐标面、Oy 轴和原点 O 的对称点分别为 $M_1(3,3,-2)$，$M_2(-3,3,-2)$，$M_3(-3,-3,-2)$。然后，如图 6，作 Oxy 面的垂线段 $\overline{MM_1}$，垂足为 Q，使 $\overline{MQ}=\overline{QM_1}$；作 Oy 轴的垂线段 $\overline{MM_2}$，垂足为 R，使 $\overline{MR}=\overline{RM_2}$；再过原点 O 作线段 $\overline{MM_3}$，使 $\overline{MO}=\overline{OM_3}$。这样得到的点 M_1，M_2，M_3 就是所要描出的对称点。

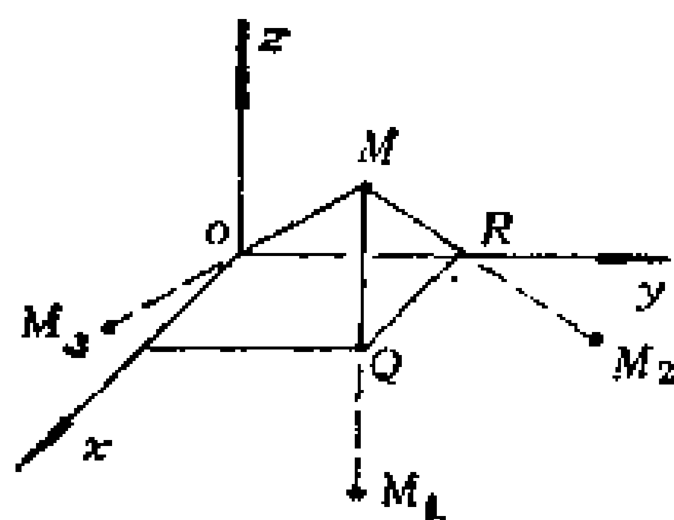


图 6

§2　空间极坐标系

空间极坐标系在地理学和天文学中有着广泛的应用。现

在，我们来建立空间极坐标系.先取一条射线Oz，过O点作垂直于射线Oz的平面Oxy. 然后，在平面Oxy上，以O为极点，射线Ox为极轴，建立平面极坐标系（图7）.

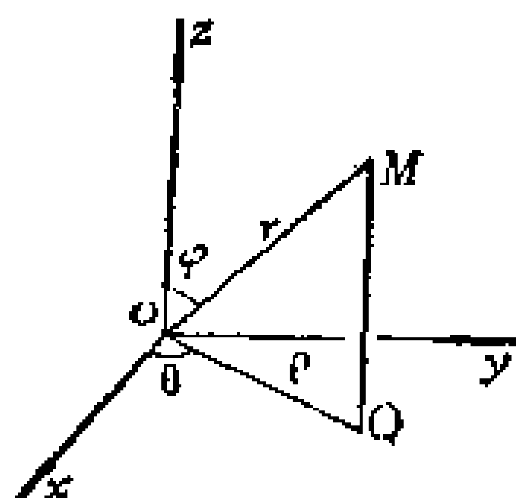


图7

设M是空间的任意一点，Q是它在平面Oxy上的射影. 连结线段$\overline{OM}$、$\overline{OQ}$，用r表示线段$\overline{OM}$的长度$r=|OM|$，用θ表示点Q的极角$\theta=\angle xOQ$，用φ表示射线Oz和$\overline{OM}$的夹角$\varphi=\angle zOM$. 因此，我们就得到一组实数r，θ，φ.当点M与O点重合时，r等于零，角θ和φ可取任意值.

反之，如果已知一组实数r, θ, φ，则可求得一点M，使线段$\overline{OM}$的长度等于r，$\angle xOQ$和$\angle zOM$分别等于θ和φ. 点M就是球面（中心为O半径为r）、锥面（顶点为O，轴为Oz，顶角为2φ）和半平面OQz(OQ与Ox交角为θ)的交点（图8）.

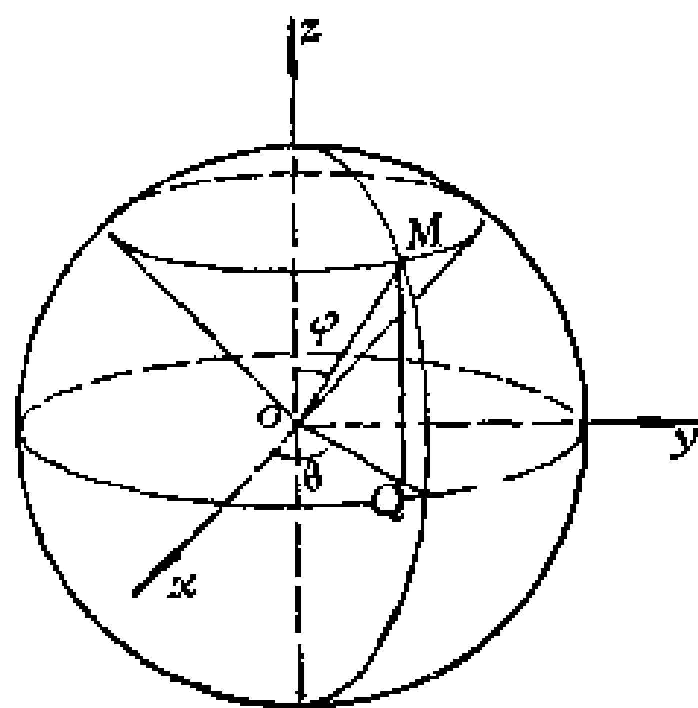


图8

这样，就可建立空间的点与数组r, θ, φ间的对应关系，但还不是一一对应. 可是，当我们取角的主值：$-\pi<\theta\leqslant\pi$，$0<\varphi<\pi$时，即除Oz轴上的点外，空间的所有点M与数组r，θ, φ之间就能够建立起一一对应关系. 建立点和数组的这种一一对应关系，我们就说在空间导入极坐标系，也称**球面坐标系**. 点M所对应的数组r, θ, φ叫做**点M的极坐标**. r叫做动径，θ叫做方位角，φ叫做天顶角. 极坐标为r, θ, φ的点M常记做$M(r, \theta, \varphi)$.

Oz轴上点的极坐标，通常是不确定的. 但，有时也把Oz轴上点的坐标看做是$r=$常数，θ取任意值，$\varphi=0$或π.

在研究某些问题时，有时需要把直角坐标变为极坐标，或把极坐标变为直角坐标。因此，我们有必要研究这两种坐标间的变换关系。

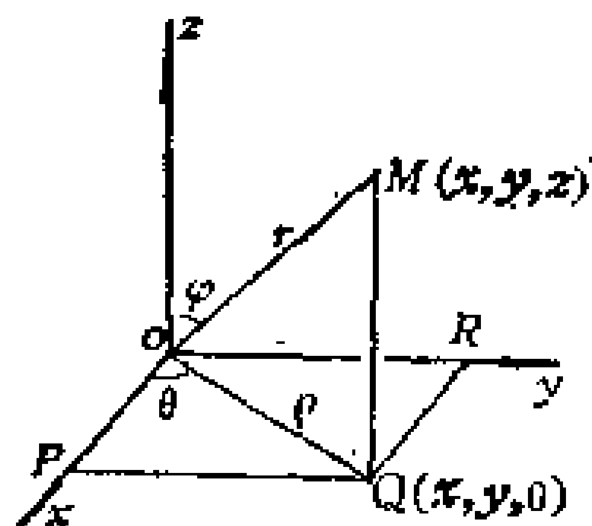


图 9

为此，我们把图 7 中的射线 Ox 和 Oz 作为直角坐标系的 Ox 轴和 Oz 轴，取它们的公垂线作为 Oy 轴，使 Ox，Oy，Oz 组成右旋系（图 9）。在这种情形下，我们来求直角坐标和极坐标的变换式。

1° 用极坐标表示直角坐标的变换式

设 M 是空间的任一点，它的直角坐标为 x,y,z，极坐标为 r,θ,φ，则

$$x = OP = \rho\cos\theta,\ y = OR = \rho\sin\theta,\ z = QM = r\cos\varphi.$$

这里，$\rho = |OQ|$。从直角三角形 OQM 可以看出，$\rho = r\sin\varphi$。由此得到

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

这就是所求的变换式。

2° 用直角坐标表示极坐标的变换式

将（1）式的每个等式两边各自平方，然后两边对应相加，则得

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= r^2[\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\varphi] \\ &= r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = r^2 \end{aligned}$$

或

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

再用（1）的第一式的两边分别去除第二式的两边，则得

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\theta \quad 或 \quad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

从（1）的第三式，得

$$\frac{z}{r}=\cos\varphi \text{ 或 } \varphi=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是，我们得到所求的变换式

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta&=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}\\ \varphi&=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

这也是（1）的逆变换式。

需要注意，用（2）式计算角 θ 时，极角的主值有时不能完全确定。如果要得到满足条件的角，可以按（x，y）的符号，也就是按点所在的象限选定。至于角φ，可以取满足（2）的第三式的正角，因为 φ 的取值范围为 $0<\varphi<\pi$。

例1　已知一点M的极坐标为$\left(2, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$，求点$M$的直角坐标。

解　由题设，已知 $r=2$，$\theta=-\frac{\pi}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$代入（1）式，得

$$x=2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

所以点M的直角坐标为$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$。

例2　已知点M的直角坐标为（-2，2，0），求点M的极坐标。

解　由题设，已知 $x=-2, y=2$，$z=0$。代入公式（2），

则得

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2}{-2} = \mathrm{tg}^{-1}(-1) = \frac{3}{4}\pi \text{ 或 } \frac{7}{4}\pi$$

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{0}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\pi$$

因为点$M(-2, 2, 0)$在第二象限，所以角 θ 应取$\frac{3}{4}\pi$. 因此，点M的极坐标为$\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

§3 柱面坐标系

下面，我们来导出柱面坐标系。

我们先确定一个空间直角坐标系（图10）．然后在坐标平面 Oxy 上建立一个以坐标原点O为极点，Ox 轴为极轴的平面极坐标系。

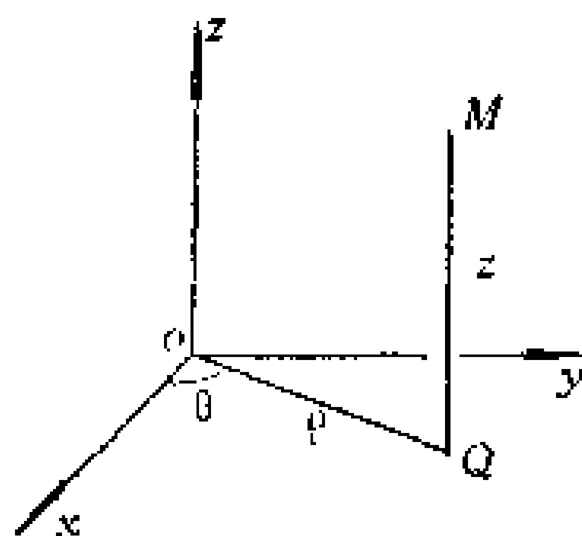


图 10

设M是不在 Oz 轴上的空间任意一点，它在 Oxy 平面上的射影为Q，用 ρ, θ 表示平面 Oxy 上点Q的极坐标，用 z 的绝对值表示点Q到点M的距离．这样，不在 Oz 轴上的空间任意一点总有 ρ, θ, z 三个数与之对应。

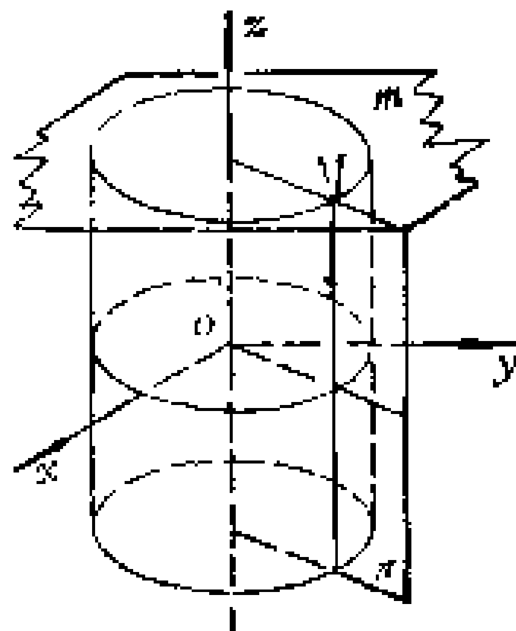


图 11

反之，当给定三个数 ρ, θ, z可确定空间唯一一点．例如，当 $\rho=$常数，而 θ，z 可任意取值时，则得到一个以 Oz 轴为轴的柱面；当 $\theta=$常数，而 ρ，z 可任意取值时，则得到一个以 Oz 轴为边界的半平面；当 $z=$常数，而 ρ，φ 可任意取值时，则得到一个平行于平

面 Oxy 的平面。

这样，当给定三个数 ρ，θ，z 则三个面——柱面 f、半平面 π 和平面 M（图11）完全确定，而这三个面相交于唯一一点。由此可知，一组数 ρ，θ，z 在空间确定唯一一点。

因此，除 Oz 轴上的点外，空间所有点与三数组 ρ，θ，z 之间成一一对应。建立点与数组间的这种对应，我们就说在空间导入**柱面坐标系**。我们把数 ρ,θ，z 叫做**点M的柱面坐标**，并记作 $M(\rho,\theta,z)$。

Oz 轴上点的柱面坐标通常是不确定的。但，有时也把这些点的坐标看做是 $\rho=0$，θ 可取任意值，$z=$某一常数。

由柱面坐标定义可知，它们的取值范围为

$$\left.\begin{aligned}&0<\rho<+\infty\\&0\leqslant\theta<2\pi\\&-\infty<z<+\infty\end{aligned}\right\}$$

容易看出，若空间任意一点M的直角坐标为(x,y,z)，它的柱面坐标为(ρ,θ,z)，则它们坐标之间，有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\theta\\y&=\rho\sin\theta\\z&=z\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

（1）式的逆变换式为

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\sqrt{x^2+y^2}\\\theta&=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}\\z&=z\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

例1 已知一点M的直角坐标为$\left(\frac{6}{5},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，求点$M$的柱面坐标。

解 由题设，知 $x=\frac{6}{5},y=-\frac{1}{2},z=\frac{3}{4}$代入（2）式，得

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}=\frac{13}{10}$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\Big/\frac{6}{5}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right)$$

$$z = \frac{3}{4}$$

所以，点M的柱面坐标为$\left[\frac{13}{10},\ \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right),\ \frac{3}{4}\right]$。

例 2 已知一点M的柱面坐标为$\left(2, \frac{\pi}{6}, 3\right)$，求点$M$的直角坐标。

解 由题设，知 $\rho=2$，$\theta=\frac{\pi}{6}$，$z=3$，代入（1）式，则得

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$z = 3$$

所以，点M的直角坐标为$(\sqrt{3}, 1, 3)$。

上边介绍的三种空间坐标系，最基本的最常用的是直角坐标系。

就空间坐标系来说，并不止上述三种。根据不同需要，还可以建立各种各样的坐标系。例如，仿射坐标系、射影坐标系等。它们将在“丛书”的《高等几何》中讨论。

习　题

1．在空间直角坐标系中，描出下列点的位置：$A(-4, 3, 3)$，$B(1, 1, -1)$，$C(2, -3, -4)$。

2．试求点 $P(3, 2, 1)$关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点坐标。

3．分别指出点 $A(a, b, c)$满足下列条件时在空间的位置：

（1）$a>0$，$b>0$，$c>0$；

（2） $a>0$，$b<0$，$c>0$；

（3） $a<0$，$b<0$，$c>0$；

（4） $a<0$，$b<0$，$c<0$；

（5） $a=0$，$b<0$，$c>0$。

4．在空间直角坐标系中，设任一点 P 的坐标为(x, y, z)，试求从点 P 引至各坐标轴和各坐标面的垂足坐标。

5．指出下列各点的位置：$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(1,0,2)$，$D(1,2,0)$。

6．试指出坐标满足：

（1） $x=y$；

（2） $x=y=z$。

的点在空间的位置。

7．坐标满足下列条件之一的点，位于哪几个卦限？（1）$xy>0$；（2）$yz<0$；（3）$xyz<0$。

8．一正四棱锥的底边和棱长均为$2a$，顶点 S 位于 Oz 轴的正向上，底面 $P_1P_2P_3P_4$ 在 Oxy 坐标面上，且 P_1P_2 垂直于 Oy轴，P_1P_4 垂直于 Ox 轴，试求点 S，P_1，P_2，P_3 及 P_4的坐标。

9．已知正方体的棱长为 m，下底面在 Oxy 坐标面上，底面中心在坐标原点，四个立棱在 Oxz 和 Oyz 坐标面上，试求各顶点的坐标。

10．试求满足 $z=5$ 的点的轨迹。

11．试求满足条件：$x=1$，$y=2$，z 为任意实数的点的轨迹。

12．试求半径为3，与三个坐标面相切，且中心在下列卦限内的球心坐标。

（1） 球心在第五卦限；

（2） 球心在第二卦限；

（3） 球心在第七卦限。

13．试在极坐标系中描出点$M_1\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$和$M_2\left(4, \frac{\pi}{3}, \pi\right)$的位置。

14．已知点 M_1，M_2 的极坐标为$\left(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}\right)$和$\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$，试求点 M_1，M_2 的直角坐标。

15．试求点$M(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$的极坐标。

16．把下列直角坐标系表示的方程化为极坐标系表示的方程：

（1） $x^2+y^2+z^2=25$；

（2）$x^2+y^2-z^2=0$。

17．已知点 A,B,C 的直角坐标分别为：$(3,-3,3)$，$(2,2\sqrt{3},1)$，$\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}\sqrt{3},-5\right)$，试求其柱面坐标。

18．已知点 A,B 的柱面坐标为$\left(3,\frac{\pi}{6},9\right)$和$\left(2,\frac{5}{6}\pi,3\right)$，试求其直角坐标。

19．试把下列直角坐标系表示的方程化为柱面坐标系表示的方程。

（1）$x-y=0$；

（2）$x^2+y^2=4$。

20．试求柱面坐标与极坐标的互化公式。

第二章 向量代数

向量运算一般分为两个方面：一是向量代数；一是向量分析．这里只介绍向量代数的有关知识．向量代数不仅是解析几何课程中的基本内容，而且也是研究自然科学和科学技术的有利工具．由于向量不仅具有与数量运算相同的一些规律，而且还有它自己的某些独特的运算性质，因而在用它解决一些问题时，迅速而简便．在这一章中，我们主要介绍向量的概念、性质及其运算．

§1 向量的概念

在我们所研究的量中，一般可分为数量和向量两种．只由数值确定的量，如长度、面积、体积、温度、质量等叫做**数量**，也称为**纯量**．除了数值外，还必须指出方向才能确定的量，如力、位移、速度、加速度等叫做**向量**，也称为**矢量**．

一个向量，可用有指向的线段$\overrightarrow{AB}$表示，A是向量的始点，B是向量的终点，向量的始点也叫做**附着点**．为了书写方便，向量也常用一个小写的拉丁字母上面画一个箭头，如$\vec{a}$来表示（图12），有时也用黑体字母如$\mathbf{a}$来表示，但在本书中的图里用正体小写字母表示．

向量的长度叫做向量的**模**．若向量为$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$，则它的模用$|\overrightarrow{AB}|$或$|\vec{a}|$表示．

模等于1的向量叫做**单位向量**．与向量$\vec{a}$具有同一方向的单位向量叫做向量$\vec{a}$的单位向量，并记做$\vec{a}^{\circ}$．

模等于零的向量叫做**零向量**．零向量的始点与终点重合，所以它表示一个点．零向量的方向是不定的，但根据需要可任

意选定．零向量用符号$\overrightarrow{0}$表示，有时也用黑体的数 0 表示．

空间任意两个向量，当它们的模相等方向相同时叫做**相等向量**．若向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$相等就可写作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$（图13）．相等向量之间的区别只是它们之间的始点位置可能不同．但是，在一般问题中，向量始点的位置是无关紧要的，重要的是向量的长度和方向．在这种意义下，空间的向量又叫做**自由向量**．也就是，一个向量在不改变它的长度和方向的前提下，可在空间自由移动，使它的始点附着于任意一点．根据相等向量的定义，同时与第三个向量相等的两个向量必然彼此相等．所有零向量都可看做是相等向量．两个模相等、方向相反的向量叫做**相反向量**．向量$\overrightarrow{a}$的相反向量用$-\overrightarrow{a}$表示．

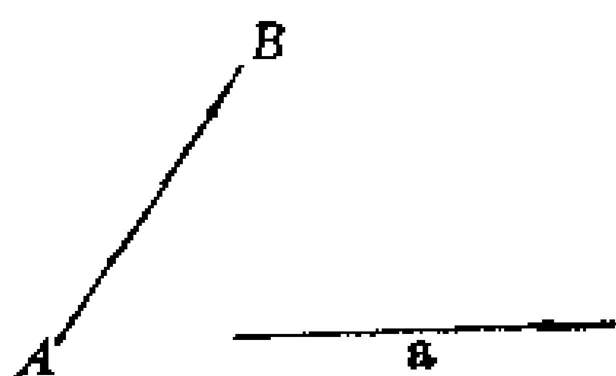


图 12

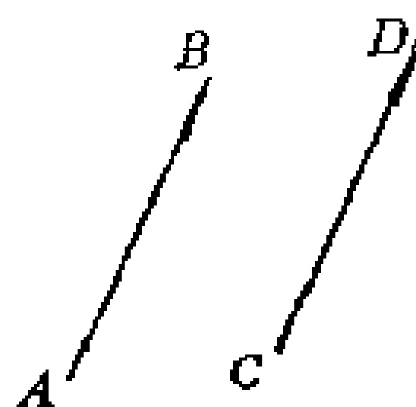


图 13

两个向量，如果它们位于平行直线上（或在一条直线上）叫做**共线向量**．平行于同一平面（或在同一面上）的向量叫做**共面向量**．

§2　向量的加减法

1　向量的加法

向量的加法类似于物理学中的力的合成法则．因此，两个向量和的定义可叙述如下：

已知两个向量$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$，将向量$\overrightarrow{b}$附着于向量$\overrightarrow{a}$的终点，则以向量$\overrightarrow{a}$的始点为始点，向量$\overrightarrow{b}$的终点为终点的向量$\overrightarrow{c}$（图14）叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$叫做向量$\boldsymbol{c}$的分向量，并且写作

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

求两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和的方法叫做向量加法．如图14所示，由于向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 构成了一个三角形，因此把这种方法叫做三角形法则．

很明显，任意一个向量与零向量的和等于它本身．

向量的加法具有下列基本运算规律．

1）交换律，即

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \qquad (1)$$

如果我们把向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 附着于同一点 O，用 A，B 分别表示它们的终点（图15）．再把向量 $\vec{b}$ 附着于点 A，用 C 表示它的终点，并用线段连结点 B、C．由于 $OBCA$ 是平行四边形，所以向量 $\overrightarrow{BC}$ 与向量 $\overrightarrow{OA}$ 共线，长度相等，方向相同．

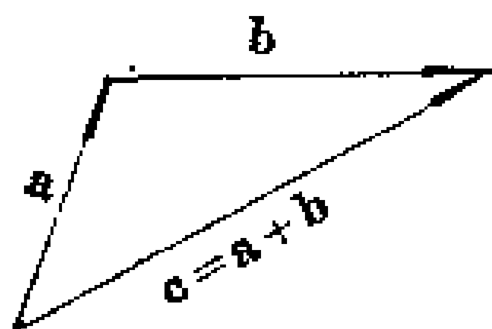


图 14

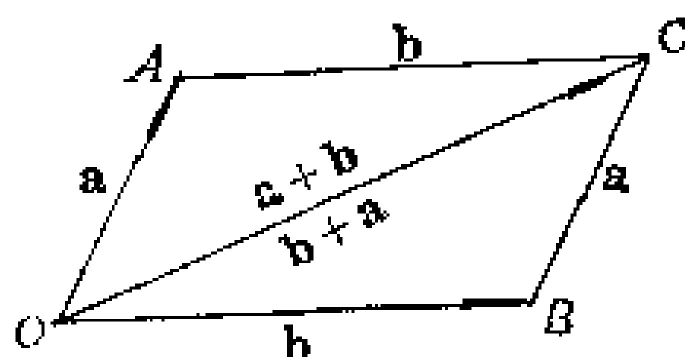


图 15

因此，$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$．由 $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$，根据向量加法的三角形法则，则得

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

和

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

因此，等式（1）成立．

向量加法的交换律说明，任意两个向量的和与它们相加的顺序无关．

容易看出，图形 $OABC$ 是由附着于共同始点的向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所构成的平行四边形，向量 OC 是它的对角线．因此，两

个向量的加法法则也可叙述为：**两个向量的和就是由它们共同始点引出的平行四边形的对角线向量**。因此，把向量相加的这种方法也叫做**平行四边形法则**。

2）结合律，即

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad (2)$$

如果我们把向量$\vec{b}$附着于向量$\vec{a}$的终点，把向量$\vec{c}$附着于$\vec{b}$的终点。再用O表示$\vec{a}$的始点，用A,B,C分别表示向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的终点（图16）。

于是，根据向量的加法，可得

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

因此，等式（2）成立。

由向量加法的结合律可知：**任意三个以上向量的和与它们的结合顺序无关**。

当我们求任意多个向量的和时，实际上，不必逐次求两个向量的和，可利用如下的一般法则立即作出：如作向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$的和，可把向量$\vec{a}_2$附着于向量$\vec{a}_1$的终点，然后再把向量$\vec{a}_3$附着于向量$\vec{a}_2$的终点，依此类推直到向量$\vec{a}_n$为止，于是以向量$\vec{a}_1$的始点为始点，以向量$\vec{a}_n$的终点为终点的向量$\vec{a}$就是这几个向量的和：

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n.$$

如果我们用O表示向量的始点，用$A_1,A_2,\cdots,A_n$分别表示向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$的终点，则

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}. \qquad (3)$$

图形17中，$OA_1A_2\cdots A_n$叫做由分向量$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1A_2}$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$所构成的折线，向量$\overrightarrow{OA_n}$叫做折线$OA_1A_2\cdots A_n$的**封闭向量**，由此可知：**要作某些向量的和，只要作出这些向量所构成折线的封闭向量就可以**。这种作法叫做**多边形法则**。

从等式（3）还可看出，如果最后一个向量的终点与第一个向量的始点重合，即$O\equiv A_n$，则这些向量的和是零向量，即

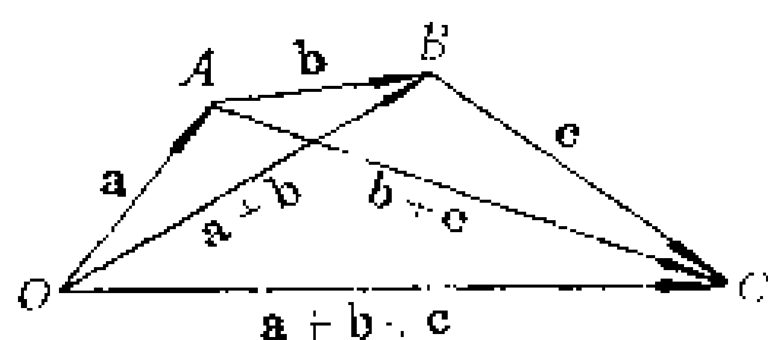


图 16

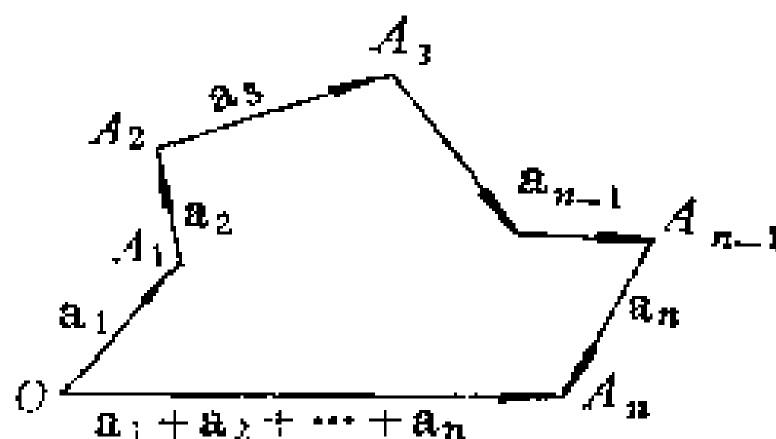


图 17

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}O}=\overrightarrow{0}.$$

2 向量减法

我们把向量减法定义为向量加法的逆运算。

如果向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{c}$ 的和等于向量 $\vec{a}$，也就是 $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，则向量 $\vec{c}$ 叫做向量 **a**与 **b** 的差，并写做

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$$

现在，把向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 附着于共同始点O，用A, B分别表示它们的终点（图18）。我们求一个与向量 $\vec{b}$ 之和为 $\vec{a}$ 的向量。根据向量加法的三角形法则可知，所求向量为 $\overrightarrow{BA}$。

因为

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA},$$

因而

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB},$$

即

$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}.$$

由此得到向量减法的几何作图法：**附着于共同始点的两个向量的差，是从“减向量”的终点到“被减向量”的终点的向量**（图18）。

利用相反向量，可把向量的减法运算变为向量的加法运算。这个事实，直接从图19，不难看出是正确的。因此，为了求得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差 $\vec{a}-\vec{b}$，可以在向量 $\vec{a}$ 上加上向量 $\vec{b}$ 的反向量，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

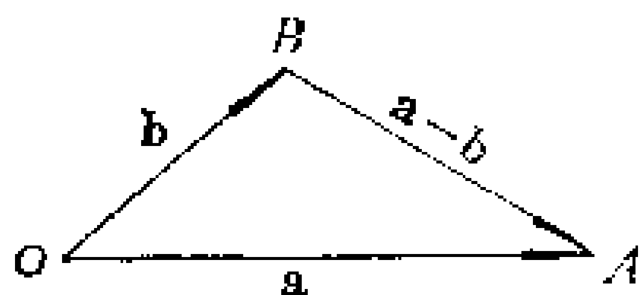


图 18

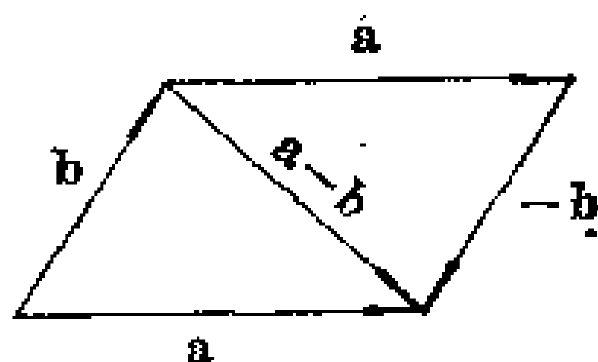


图 19

同理可知，

$$\vec{a}-(-\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}.$$

因而，在向量的加减法运算中，如果括号前有正号，可省略括号；如果括号前有负号，可改变括号内所有各项的符号，而去掉括号。

例 1 已知四边形的对角线互相平分（图20），试证这个四边形是平行四边形。

证 把这个四边形中的线段看做向量。按已知条件，则得

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$$

由此，

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}.$$

所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

这就是说，AD 与 BC 两条边平行且相等，因此四边形是平行四边形。

例 2 对于任意两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，证明下面的不等式成立：

$$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqslant|\vec{a}-\vec{b}|.$$

证 根据初等几何已知，三角形两边之差小于第三边（图21）。在 $\triangle ABC$ 中，

$$|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|\leqslant|\overrightarrow{BA}|. \qquad (*)$$

因为

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \therefore |\overrightarrow{OA}|=|\vec{a}|,$$

$$\overrightarrow{OB}=\vec{b},\quad \therefore |\overrightarrow{OB}|=|\vec{b}|.$$
$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b},\quad \therefore |\overrightarrow{BA}|=|\vec{a}-\vec{b}|.$$

代入(*)中，得

$$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqslant|\vec{a}-\vec{b}|.$$

当点B落在OA上，则$|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$。所以，求证的不等式成立。

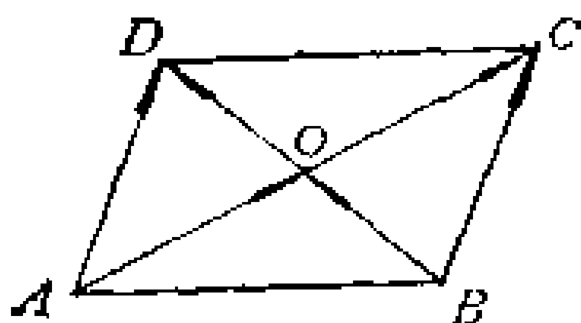


图 20

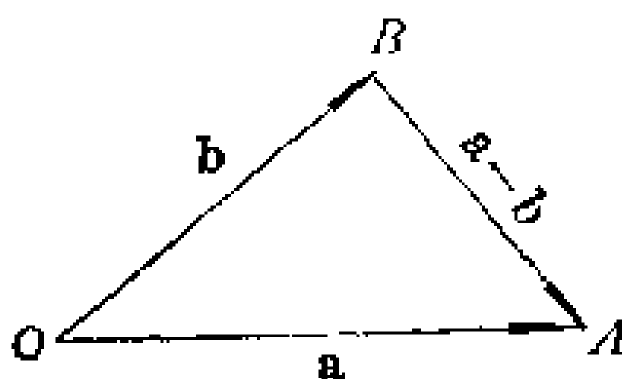


图 21

§3 向量与数的乘积

现在，我们来研究向量与数的乘法运算。

设已知向量$\vec{a}$与任意实数λ，若向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}$共线，其长度为$|\lambda|\,|\vec{a}|$，而且当$\lambda>0$时，向量$\vec{b}$的方向与向量$\vec{a}$的方向相同；当$\lambda<0$时，$\vec{b}$的方向与$\vec{a}$的方向相反，则向量**b叫做向量a与数λ的乘积**（图22），并记作

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\text{ 或 }\vec{b}=\vec{a}\lambda.$$

求向量$\lambda\vec{a}$的方法叫做向量$\vec{a}$与数λ的乘法。

由数与向量乘积的定义，立即可知：

1° 当向量$\vec{a}$乘以$\lambda=0$时，它们的乘积是零向量；

2° $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$，$(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$；

3° 已知向量$\vec{a}$和它的单位向量$\vec{a}^{\circ}$，下面等式成立：

$$\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}^{\circ}，\text{或 }\vec{a}^{\circ}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

由此可知，一个非零向量a除以它的模就可以得到它的单位向

量.

现在，我们来证明向量与数的乘积具有下列基本运算规律。

1）结合律，即

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}. \qquad (1)$$

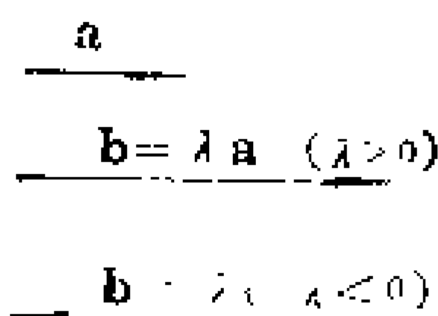


图 22

事实上，（1）式两边的向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 都与向量 $\vec{a}$ 共线，并且方向彼此相同，这是因为当数 λ 与 μ 的符号相同时，它们的方向都与向量 $\vec{a}$ 的方向相同；当数 λ 与 μ 的符号相异时，它们的方向都与向量 $\vec{a}$ 的方向相反。同时，它们的长度也相等，因为

$$|\lambda(\mu\vec{a})|=|\lambda||\mu\vec{a}|=|\lambda||\mu||\vec{a}|=|\lambda\mu||\vec{a}|=|(\lambda\mu)\vec{a}|.$$

因此，等式（1）成立。

2）向量按数因子的分配律，即

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}. \qquad (2)$$

事实上，向量 $(\lambda+\mu)\vec{a}$ 与 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ 共线，若数 λ 与 μ 符号相同，则向量 $\lambda\vec{a}$ 与 $\mu\vec{a}$ 的方向相同（图23（a））。这时，向量 $(\lambda+\mu)\vec{a}$ 的方向也与它们相同，并且长度等于它们长度的和：

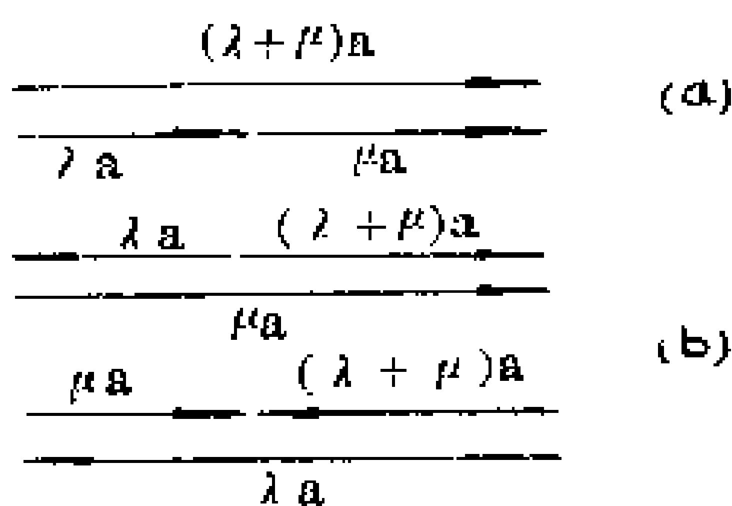


图 23

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\vec{a}|&=|\lambda+\mu||\vec{a}|\\&=(|\lambda|+|\mu|)|\vec{a}|\\&=|\lambda||\vec{a}|+|\mu||\vec{a}|\\&=|\lambda\vec{a}|+|\mu\vec{a}|.\end{aligned}$$

因此，向量 $(\lambda+\mu)\vec{a}$ 是向量 $\lambda\vec{a}$ 与 $\mu\vec{a}$ 的和。

如果数 λ 与 μ 的符号相异，则向量 $\lambda\vec{a}$ 与 $\mu\vec{a}$ 的方向相反（图23（b））：这时向量 $(\lambda+\mu)\vec{a}$ 的方向与其中较长的一个相同，并且长度等于它们长度的差，

$$
\begin{aligned}
|(\lambda+\mu)\vec{a}| &= |\lambda+\mu|\,|\vec{a}| \\
&= (|\lambda| \sim |\mu|)\,|\vec{a}| \\
&= |\lambda|\,|\vec{a}| \sim |\mu|\,|\vec{a}| \\
&= |\lambda\vec{a}| \sim |\mu\vec{a}|.
\end{aligned}
$$

符号～表示二数差中大数减去小数。

因此，向量$(\lambda+\mu)\vec{a}$是向量$\lambda\vec{a}$与$\mu\vec{a}$的和。

总之，等式（2）成立。

3）数按向量因子的分配律，即

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}. \qquad (3)$$

事实上，向量$\vec{a}+\vec{b}$是向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所构成的平行四边形的对角线；当以数$\lambda(\neq 0)$乘向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$时，就是把这个平行四边形相似变换为一个新的平行四边形。因此，向量$\lambda(\vec{a}+\vec{b})$是向量$\lambda\vec{a}$与$\lambda\vec{b}$所构成的平行四边形的对角线。所以，向量$\lambda(\vec{a}+\vec{b})$是向量$\lambda\vec{a}$与$\lambda\vec{b}$的和（图24）。因此，等式（3）成立。

从上面所证明的性质，可以得到**向量多项式乘数量多项式的乘法法则，就是逐项相乘。**

例 已知AA_1，BB_1，CC_1是三角形ABC的三条中线（图25），试证$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$。

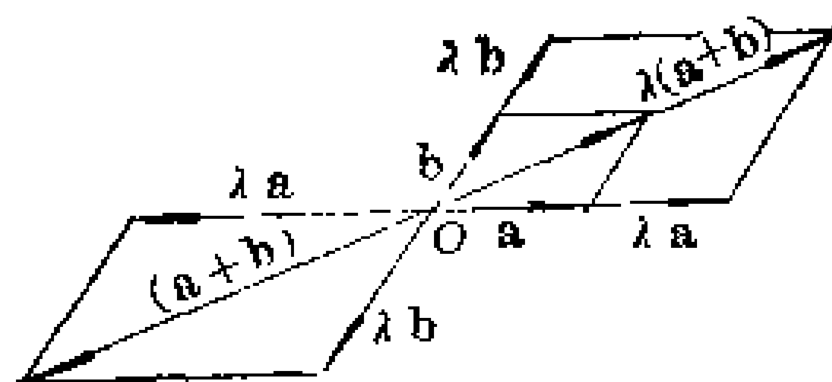


图 24

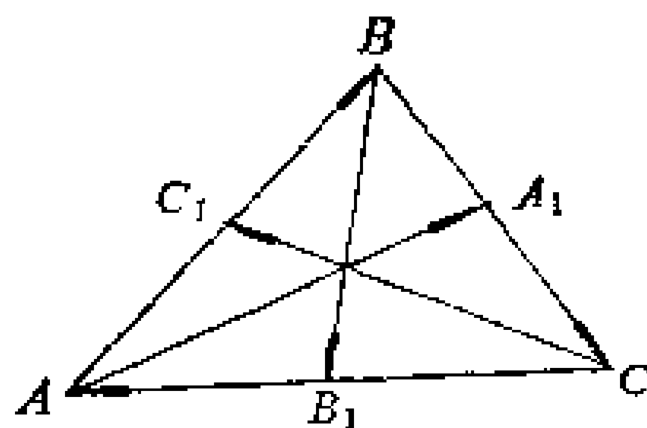


图 25

证 因
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AA_1} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1} \\
&= \overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2},
\end{aligned}
$$

同理

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

把这些等式相加并应用加法性质，则得

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

再应用分配性质，则得

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).$$

因为

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$$

所以

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}.$$

由此可以得出结论：**对于任意已知三角形 ABC，总存在另一个三角形，它的三条边分别平行且等于已知三角形的三条中线。**

§4 向量的线性关系

在前几节中，我们已经讲过了向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算。今后，我们把这三种运算总称为向量的线性运算。在这个基础上，我们来研究向量的线性关系。

所谓向量的线性关系是指用一次式的关系把向量结合起来。在这里介绍向量的线性关系和有关概念是想用来说明一些问题的几何意义。

若已知向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，…，$\overrightarrow{l}$，$\overrightarrow{m}$和数 $a, b, c, \cdots$，l，m，

由它们组成一个新向量

$$\vec{u}=a\vec{a}+b\vec{b}+\cdots+m\vec{m}, \tag{1}$$

则向量$\vec{u}$叫做向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{m}$**的线性组合**．也可以说，向量$\vec{u}$按向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$分解，$a\vec{a}, b\vec{b}, \cdots, m\vec{m}$叫做向量$\vec{u}$在$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$方向上的**分量**，$a, b, \cdots, m$ 叫做**分解系数**．

我们还可以把线性组合的概念加以扩充，引进线性相关和线性无关的概念．

对于向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$，若有不全为零的数$a, b, \cdots, m$ 存在，且适合条件

$$a\vec{a}+b\vec{b}+\cdots+m\vec{m}=\vec{0} \tag{2}$$

则向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$ 叫做**线性相关**．否则，叫做**线性无关**．

由定义可知，若向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$ 线性无关，而（2）式成立，则必有

$$a=b=\cdots=m=0.$$

关于向量的线性关系，我们主要考虑下面的几个命题．

向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{m}$ 线性相关的必要充分条件是，其中一个向量能表为其余向量的线性组合．

实际上，若向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$ 线性相关，根据线性相关定义 $a, b, \cdots, m$ 不全为零，设 $a\neq0$，则（2）式就可写作

$$\vec{a}=\left(-\frac{b}{a}\right)\vec{b}+\left(-\frac{c}{a}\right)\vec{c}+\cdots+\left(-\frac{m}{a}\right)\vec{m}.$$

这就是说，向量$\vec{a}$是向量$\vec{b}, \vec{c}, \cdots, \vec{m}$ 的线性组合．反之，若向量$\vec{u}$是向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}$ 的线性组合，则从（1）式可得

$$a\vec{a}+b\vec{b}+\cdots+m\vec{m}+(-\vec{u})=\vec{0},$$

或

$$a\vec{a}+b\vec{b}+\cdots+m\vec{m}+u\vec{u}=\vec{0}. \quad (u=-1)$$

可见，向量$\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \vec{m}, \vec{u}$是线性相关的．

两个向量共线的必要充分条件是它们线性相关．

实际上，因为一个向量$\vec{a}$与之共线的向量$\vec{b}$可以写做$\vec{b}=$

$l\vec{a}$. 若令 $l=-\frac{a}{b}$，则

$$a\vec{a}+b\vec{b}=\vec{0} \qquad (3)$$

这里 b 不等于零，所以向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是线性相关的. 反之，若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是线性相关的，则等式（3）成立. 因为 a,b 中至少有一个不为零，设 $b\neq0$，这时

$$\vec{b}=-\frac{a}{b}\vec{a} \quad \text{或} \quad \vec{b}=l\vec{a},$$

因此向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是共线的.

三个向量共面的必要充分条件是它们线性相关.

实际上，若已知向量 $\vec{a}$ 以及与它不共线的向量 $\vec{b}$，则如图26所表明的，若使等式（3）成立，只有 $a=b=0$ 才行. 象这样两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，只限于 $a=b=0$ 等式（3）才成立，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是线性无关的.

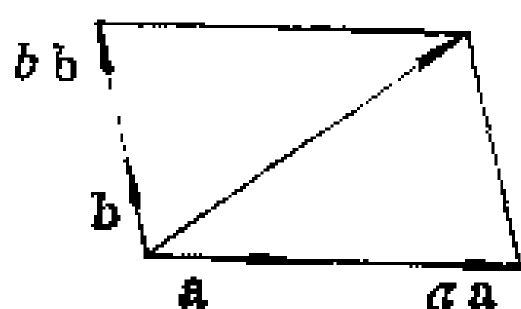


图 26

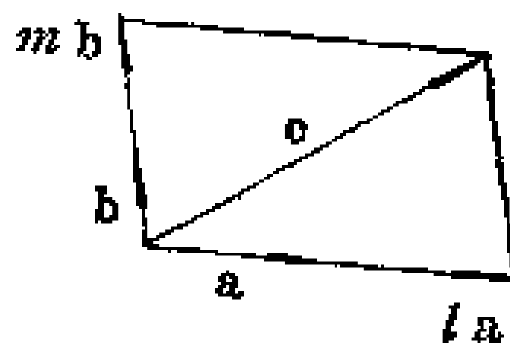


图 27

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 线性无关，则它们可决定一个平面. 如图27所表明的，对于平面上的任意一个向量 $\vec{c}$，满足 $\vec{c}=l\vec{a}+m\vec{b}$ 的 l，m 存在而且可以唯一决定. 也就是向量 $\vec{c}$ 是向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的线性组合，或说向量 $\vec{c}$ 按向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 分解. 若令

$$l=-\frac{a}{c}, \quad m=-\frac{b}{c}, \text{则}$$

$$a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}=\vec{0} \qquad (4)$$

这里 c 不等于零. 这就是说，在同一平面上的三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 总是线性相关的. 反之，如过一点引三个线性相关的向量

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 即等式（4）成立．其中 a, b, c 只少有一个不等于零．设 $c\neq 0$，则

$$\vec{c}=-\frac{a}{c}\vec{a}-\frac{b}{c}\vec{b}.$$

于是，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 在同一平面上．

空间任意四个向量总是线性相关的．

实际上，若过一点O引三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，如果它们不在同一平面上，如图28所表明的，要使（4）成立，只有 $a=b=c=0$ 才行．象这样的三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 只限于 $a=b=c=0$ 时（4）式才成立，则向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是线性无关的．

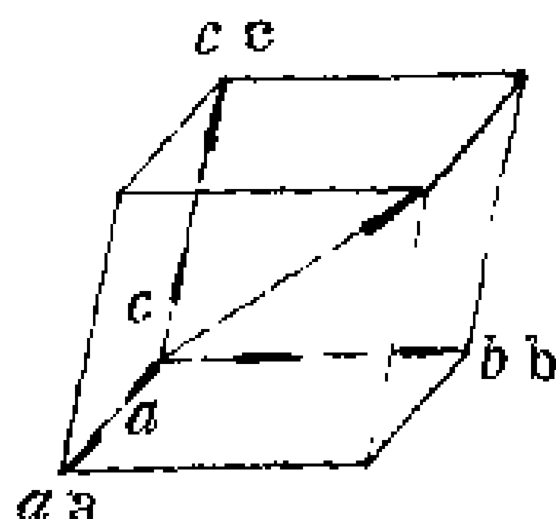


图 28

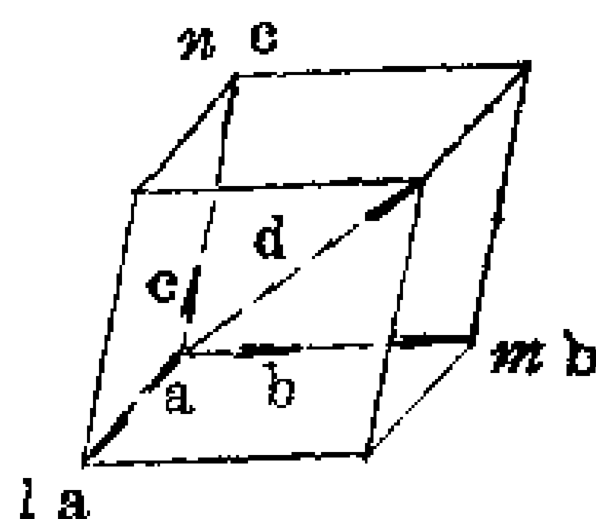


图 29

现在，我们过一点引三个线性无关的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，按定义它不会在同一平面上．因此，如图29所表示的，对于空间任意向量 $\vec{d}$，满足 $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ 的 l, m, n 存在而且可唯一决定．于是，若令 $l=-\frac{a}{d}$，$m=-\frac{b}{d}$，$n=-\frac{c}{d}$，则

$$a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}+d\vec{d}=\vec{0} \qquad (5)$$

这里 d 不等于零．这就是说，向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 是线性相关的．

推论　空间任意一个向量 d 总可按三个线性无关的向量 a，b，c 分解．

实际上，若三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是线性无关的，根据上述命题，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 必线性相关，即（5）式成立．这里 $d\neq 0$，否则 a, b, c 中将有一个不等于零的数使 $a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}$

$=\vec{0}$. 这与向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{c}$是线性无关的假定矛盾。因此，得到

$$\vec{d} = -\frac{a}{d}\vec{a} - \frac{b}{d}\vec{b} - \frac{c}{d}\vec{c}$$

$$= l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}. \tag{6}$$

这就是说，向量$\vec{d}$按向量$\vec{a}$，$\vec{b}$．$\vec{c}$分解了。

例 试用代数方法证明，（6）式的分解方法是唯一的。

证 假设向量$\vec{d}$还有另一种按向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$分解的方法，如

$$\vec{d} = l_1\vec{a} - m_1\vec{b} + n_1\vec{c}, \tag{7}$$

则必有

$$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = l_1\vec{a} + m_1\vec{b} + n_1\vec{c}$$

或

$$(l-l_1)\vec{a} + (m-m_1)\vec{b} + (n-n_1)\vec{c} = \vec{0}.$$

由假设，（6）与（7）是不同的分解，所以 $l-l_1$，$m-m_1$，$n-n_1$ 不会同时为零．因此，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是线性相关的，这与原设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$线性无关矛盾。

于是，分解式（6）是唯一的。

§5 向量在轴上的射影

设已知任意轴 u 和某一向量$\overrightarrow{AB}$（图30）．我们过A, B两点作垂直于 u 轴的平面 α, β. 这两个平面与轴 u 的交点为A'和B'。A', B' 也叫做 A, B 在轴 u 上的射影．以 A'为始点 B'为终点的向量$\overrightarrow{A'B'}$叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的射影向量，射影向量$\overrightarrow{A'B'}$ 对轴 u 的代数值叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的射影，并记做

射$_u\overrightarrow{AB} = A'B'$.

若把向量$\overrightarrow{AB}$附着于轴 u 的任意一点 O，则轴 u 的正半轴与向量$\overrightarrow{AB}$的夹角 φ（图31）叫做向量$\overrightarrow{AB}$对轴 u的幅角。角 φ 是从 0 到 π。因此空间任意向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的射影可用向量$\overrightarrow{AB}$的模$|\overrightarrow{AB}|$和它对轴 u 的幅角 φ 来表示，即

$$射_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi.$$

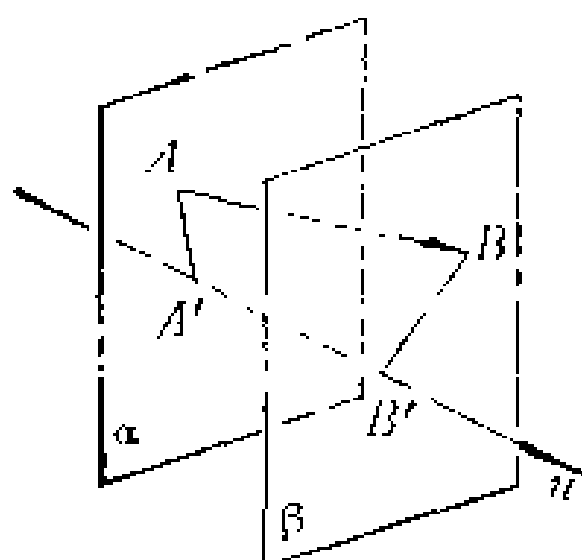


图 30

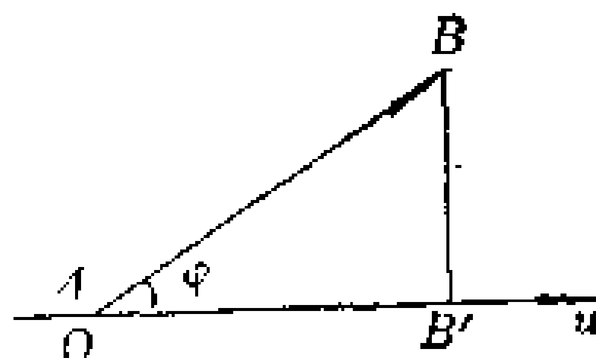


图 31

也就是，任意向量在轴上的射影等于此向量的模长与其幅角余弦的乘积。

下面，我们来证明关于向量射影的几个定理。

定理 1 **空间相等向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 在同轴上的射影相等，即**

$$射_u \overrightarrow{AB} = 射_u \overrightarrow{CD} \qquad (1)$$

证明 因为两个相等向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的方向是相同的，所以它们对轴 u 的幅角 φ 是相等的。因此，有

$$射_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi, 射_u \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}| \cos\varphi,$$

又因相等向量的模相等，即 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$，

所以

$$射_u \overrightarrow{AB} = 射_u \overrightarrow{CD}.$$

即等式（1）成立。

定理 2 **两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和在轴 u 上的射影等于各向量在轴 u 上射影的和，即**

$$射_u(\vec{a} + \vec{b}) = 射_u \vec{a} + 射_u \vec{b} \qquad (2)$$

证明 我们把向量 $\vec{b}$ 附着于向量 $\vec{a}$ 的终点(图32)。用 O 表示向量 $\vec{a}$ 的始点，A 和 B 分别表示向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的终点，这时

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

再作点 O, A, B 在轴 u 上的射影，分别用 O', A', B' 表示，则得

$$射_u \vec{a} = O'A', 射_u \vec{b} = A'B',$$

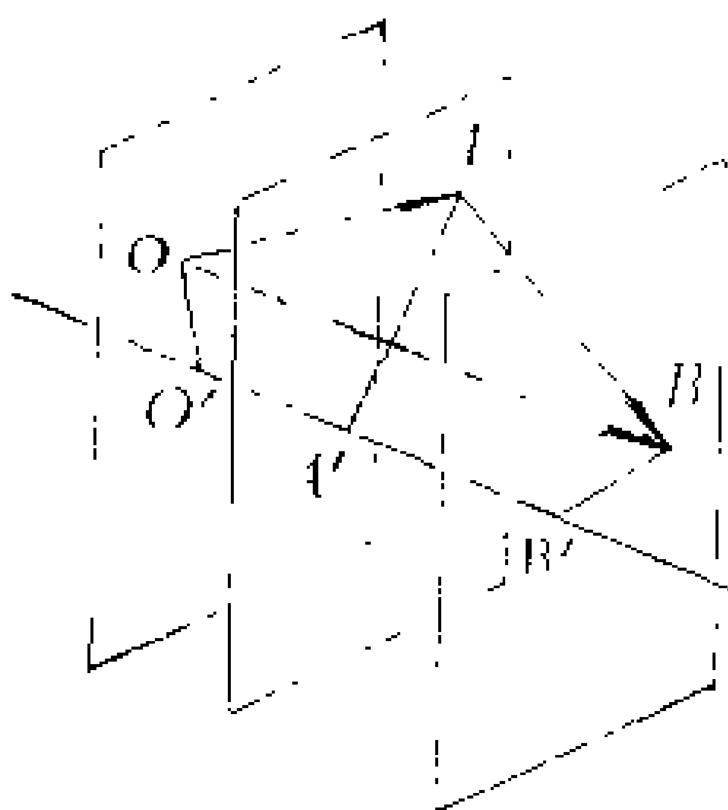


图 32

又因

$$射_u(\vec{a}+\vec{b}) = 射_u \overrightarrow{OB} = O'B',$$

而

$$O'B' = O'A' + A'B'$$

所以，等式（2）成立。

定理 2 也适用于两个向量的差，并且可以把它推广到一般情形：**若干向量的代数和在某轴上的射影等于这些向量在同一轴上的射影之和**。例如

$$射_u(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}) = 射_u\vec{a} - 射_u\vec{b} + 射_u\vec{c} - 射_u\vec{d}.$$

定理 3　向量 $\vec{a}$ 与数 λ 的乘积在轴 u 上的射影等于数 λ 与向量 $\vec{a}$ 在轴 u 上射影的乘积，即

$$射_u\lambda\vec{a} = \lambda射_u\vec{a} \qquad (3)$$

证明　把向量 $\vec{a}$ 附着于轴 u 上任意一点 O，用 A 表示它的终点（图33，(a)，(b)）．假定向量 $\lambda\vec{a}$ 也附着于点 O，用 B 表示它的终点．因此，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{a}$，并且点 O, A, B 在一条直线上。

我们用 v 表示通过点 O, A, B 的直线，用 O', A', B' 表示点 O, A, B 在轴 u 上的射影。

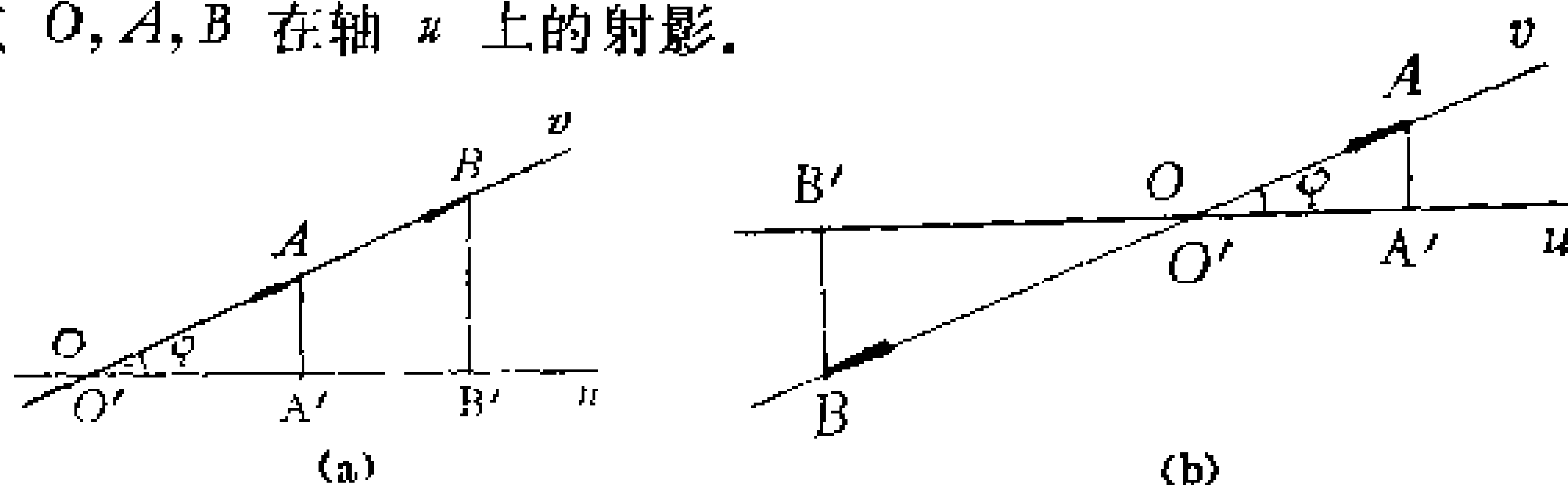


图 33

当 $\lambda>0$ 时，如图(a)，则有

$$射_u\lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos\varphi = |\lambda|\,|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda射_u\vec{a},$$

当 $\lambda<0$ 时，如图(b)，则有

$$射_u\lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos(180-\varphi) = -|\lambda|\,|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda|\vec{a}|\cos\varphi$$

$$=\lambda 射_u \vec{a}.$$

即

$$射_u \lambda \vec{a} = \lambda 射_u \vec{a}.$$

所以，等式（3）成立。

由定理2和定理3，可得出更一般的结论：**若干向量的线性组合在轴 u 上的射影等于这些向量在同一轴上的射影的代数和。**例如

$$射_u(a\vec{a}+b\vec{b}+\cdots+m\vec{m})$$

$$=a射_u\vec{a}+b射_u\vec{b}+\cdots+m射_u\vec{m}.$$

§6 向量的坐标

在§4中，我们已经讲过，若已知三个不共面的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，则空间的任意一个向量可按向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 分解，也可以说可用向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的线性组合表出。为了简便，可取三个所谓基本向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 来代替向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$。这三个基本向量满足下列条件：

1° 向量 $\vec{i}$ 在 Ox 轴上，向量 $\vec{j}$ 在 Oy 轴上，向量 $\vec{k}$ 在 Oz 轴上。

2° $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 都是单位向量，即 $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$。

3° 向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 的方向都与它们所在轴的正向相同，因而 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 适合右手系（图34）。

这样，空间任意一个向量 $\vec{a}$，总可以把它的始点附着于坐标原点，作成一个以 $\vec{a}$ 为对角线的长方体（图34）。因而，向量 $\vec{a}$ 总可按基本向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分解如下：

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$

$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

$$=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

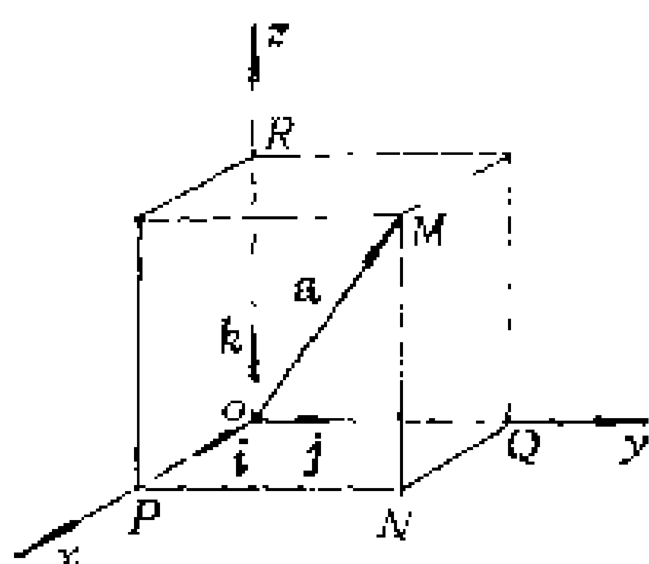


图 34

因为分解系数 x, y, z 是唯一确定的。所以，空间任意一个向量总有确定的三个数与之对应。反之，当给定三个数 x, y, z，就可在三个坐标轴上分别确定三个点 P，Q，R。过点 P, Q, R 作它们所在轴的垂直平面交于一点 M，因面确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$。因此，每给定三个数就总有唯一确定的向量与之对应。

由此可见，空间所有向量与所有有序三数组之间可以建立起一一对应关系。

于是，我们就把分解系数 x, y, z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ **的直角坐标，简称向量** $\boldsymbol{a}$ **的坐标**。坐标为 x, y, z 的向量，用记号 $\vec{a}=\{x, y, z\}$ 表示。向量 $x\vec{i}$，$y\vec{j}$，$z\vec{k}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 沿坐标轴的**分量**。之所以叫做分量，是因为它们的和构成了向量 $\vec{a}$。

因为基本向量是单位向量，所以容易看出，x, y, z 是向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 方向上或者说在 Ox, Oy, Oz 轴上的射影，即

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{射}_{Ox}\vec{a} \\ y &= \text{射}_{Oy}\vec{a} \\ z &= \text{射}_{Oz}\vec{a} \end{aligned}\right\}$$

因此，我们可以引进向量坐标的另一种定义：**向量在坐标轴上的射影叫做向量的坐标。**

由此可知，根据§5的定理 1，则相等向量的坐标也相等。

我们把始点在坐标原点的向量，如图34中的向量 $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的**径向量**。如果点 M 的坐标为 x, y, z，向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 X, Y, Z，容易看出

$$\left.\begin{aligned} x &= OP = X \\ y &= OQ = Y \\ z &= OR = Z \end{aligned}\right\}$$

因此，空间任意点的坐标与这点的径向量的坐标在数值上是相同的。

空间任意一个向量由它的始点和终点的坐标完全确定。因此，由向量的始点和终点的坐标就能算出该向量的坐标。若向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的始点 M_1 与终点 M_2 的坐标各为 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2)，并设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标为 x,y,z，则向量坐标与点坐标之间有下列关系

$$\left.\begin{array}{l} x = x_2 - x_1 \\ y = y_2 - y_1 \\ z = z_2 - z_1 \end{array}\right\}$$

如图35，我们把向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的始点 M_1 与终点 M_2 都与坐标原点 O 联成向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 和 $\overrightarrow{OM_2}$。则得

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

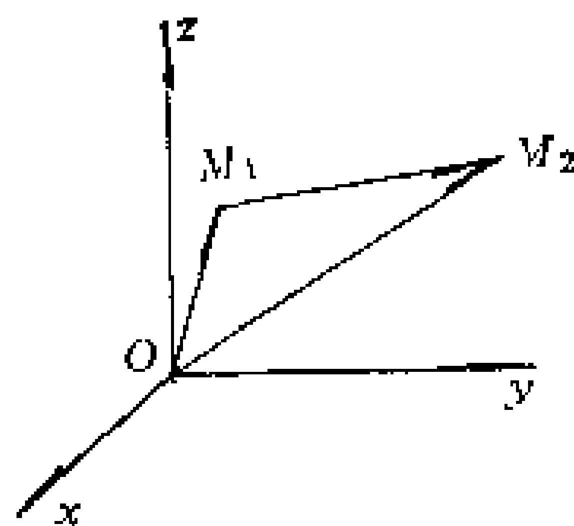


图 35

而

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}),$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

也就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 按 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分解了。因此，分解系数 $x_2 - x_1$，$y_2 - y_1$，$z_2 - z_1$，就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标。所以，$x = x_2 - x_1$，$y = y_2 - y_1$，$z = z_2 - z_1$。

由此可以断定，**空间任意一个向量的坐标等于它的终点坐标减去始点坐标所得的差**。

定义了向量坐标之后，向量的线性运算都可用向量的坐标表示出来。

如果已知两个向量 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ 和 $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$，它们

都可写做按基本向量的分解形式：

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$
$$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

根据向量的和、差以及向量与数的乘积的性质，则得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2)\vec{i}+(y_1\pm y_2)\vec{j}+(z_1\pm z_2)\vec{k},$$
$$\lambda\vec{a}=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}.$$

因此，则向量 $\vec{a}\pm\vec{b}$ 和 $\lambda\vec{a}$ 的坐标是：

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2\}$$
$$\lambda\vec{a}=\{\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\}$$

由此可知，两个向量代数和的坐标等于它们对应坐标的代数和，向量与数乘积的坐标等于这个数与向量的对应坐标的积.

在上述讨论的基础上，我们可以推出如下几个重要结果：

1° 向量的模长.

已知空间任意一个向量 $\vec{a}=\{x,y,z\}$，则 $\vec{a}$ 总可以看做一个长方体的对角线. 若把向量 $\vec{a}$ 沿坐标轴的分量当作长方体的棱（图34），又因为 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是基本向量，所以这些棱长是 $|x|$，$|y|$，$|z|$. 因为长方体的对角线平方等于它三个棱的平方和. 所以，向量 $\vec{a}$ 的模长为

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这就是利用向量的坐标计算向量的模长公式.

2° 两点间的距离.

对于空间任意两点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，可求它们之间的距离.

设 d 为两点 M_1 和 M_2 间的距离，则 d 可以看做向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模长，即 $d=|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 而向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$$

根据向量的模长公式，则得

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是说，两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离等于

这两点坐标差的平方和的平方根。

在特别情况下，如坐标原点与空间任意一点 $M(x,y,z)$ 的距离为

$$d=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

也就是，**坐标原点与空间任意一点的距离等于这点的三个坐标的平方和的平方根。**

3° 定比分点。

已知空间任意两点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，试在直线 M_1M_2 上求出一点 M，使它分割线段 $\overline{M_1M_2}$ 为已知比 $\lambda(\lambda \neq -1)$。若 x,y,z 是分点M的坐标，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1-\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (*)$$

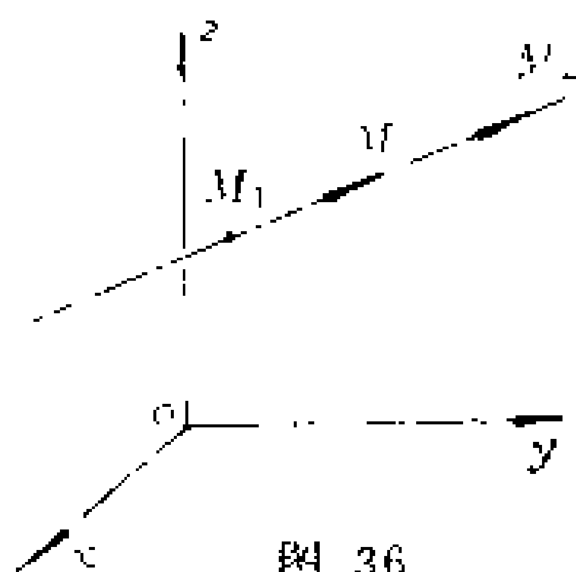


图 36

实际上，在图36中，由于向量 $\overrightarrow{M_1M}$ 与 $\overrightarrow{MM_2}$ 是共线的，所以 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$。因为

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\},$$

$$\lambda\overrightarrow{MM_2}=\{\lambda(x_2-x),\ \lambda(y_2-y),\ \lambda(z_2-z)\}.$$

根据相等向量的对应坐标相等，所以

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

经过简单整理，即得公式（$*$）。

当分点M是线段 $\overline{M_1M_2}$ 的中点时，$\lambda=1$。因此，线段 $\overline{M_1M_2}$ 的中点坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1-y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 1 已知向量 $\vec{a}=\{4,-1,3\}$ 和 $\vec{b}=\{5,2,-2\}$，求 $2\vec{a}+3\vec{b}$。

解 因为 $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},2\vec{a}=8\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$

$\vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k},3\vec{b}=15\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}.$

所以

$$2\vec{a}+3\vec{b}=23\vec{i}+4\vec{j},$$

或记作 $\quad 2\vec{a}+3\vec{b}=\{23,4,0\}$.

也可直接计算：

$\because\quad \vec{a}=\{4,\ -1,3\}$, $\therefore\quad 2\vec{a}=\{8,\ -2,\ 6\}$,

又 $\quad\because\vec{b}=\{5,2,-2\}$, $\therefore\quad 3\vec{b}=\{15,6,-6\}$,

所以 $\quad 2\vec{a}+3\vec{b}=\{8+15,\ -2+6,\ 6+(-6)\}=\{23,4,0\}$.

例 2 试在 Ox 轴上求出一点 P，使它与点 $P_0(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

解 设在 Ox 轴上所求点P的坐标为$(x,0,0,)$，我们的目的是要求出 x.

按给定的条件， $|P_0P|=\sqrt{30}$，即

$$\sqrt{(x-4)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{30}.$$

或者 $\quad (x-4)^2=25$

所以 $\quad x=9$和-1

因此，所求点P为$(9,0,0)$或$(-1,0,0)$.

§7 向量的方向余弦

设已知向量$\vec{a}$，使它附着于已知坐标系的坐标原点．用α,β,γ 分别表示向量$\vec{a}$对轴 Ox，Oy， Oz 的幅角（图37）．因为这三个角能确定向量$\vec{a}$的方向，因此 α,β,γ叫做向量 $\boldsymbol{a}$的方向角，然而，在解析几何中，我们并不常使用方向角α,β,γ，而是常常使用这些角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$．我们把一个向量方向角的余弦叫做向量的**方向余弦**．而且因为它们是数，更便于运算．之所以叫方向余弦，是因为已知向量的方向余弦就可确定向量的方向．

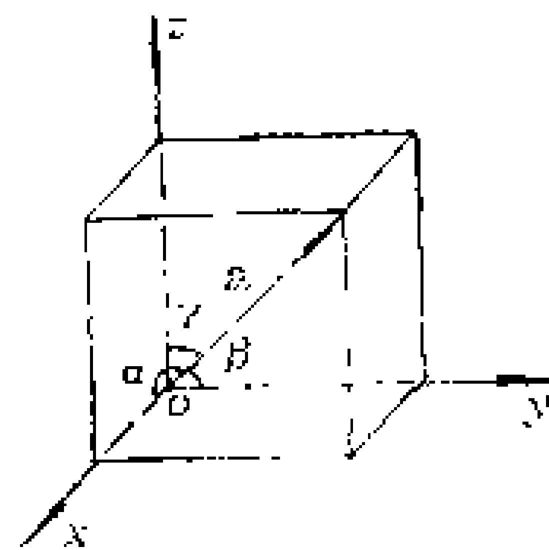


图 37

因为向量的坐标就是它在三个

坐标轴上的射影，所以对于任意向量 $\vec{a}$，它的模 $|\vec{a}|$，方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 和它的坐标 x,y,z 之间有下列关系：

$$x=|\vec{a}|\cos\alpha,\quad y=|\vec{a}|\cos\beta,\quad z=|\vec{a}|\cos\gamma. \tag{1}$$

由等式（1）可知，若已知一个向量的方向余弦和它的模，则向量的坐标就确定了，因而向量也就被确定了。

在向量 $\vec{a}$ 是单位向量的情形下，即 $|\vec{a}|=1$，则等式(1)变为

$$x=\cos\alpha,\quad y=\cos\beta,\quad z=\cos\gamma.$$

这就是说，**单位向量的坐标等于它的方向余弦。**

如果要求向量 $\vec{a}=\{x,y,z\}$ 的方向余弦，那么从等式（1），可立刻得到

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{2}$$

若把等式（2）的两边各自平方，然后对应相加，则得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{3}$$

等式（3）表明，**任何向量的方向余弦的平方和恒等于1.**

由等式（3）可知，若已知向量的方向角 α,β,γ 中的任何两个，并且还知道第三个角是锐角或是钝角，则可唯一确定第三个角。因此，当知道一个向量的两个方向角，并且还知道第三个角是锐角或是钝角，则这个向量的方向就被确定。

需要注意，为了确定一个向量 $\vec{a}=\{x,y,z\}$ 的方向，并不一定要知道它的方向余弦，只要知道与方向余弦成比例的三个数就可以了（比例系数为正）。我们把这样的三个数叫做向量 $\vec{a}$ 的**方向数**。可见向量 $\vec{a}$ 的坐标和方向余弦也是它的方向数。若 $\lambda>0$，则 $(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)$ 都是向量 $\vec{a}$ 的方向数。因此，一个向量的方向数有无穷多组。

例1　已知向量 $\vec{a}$ 与三个坐标轴的夹角相等，求向量 $\vec{a}$ 的方向余弦。

解　设向量 $\vec{a}$ 与三个坐标轴的夹角分别为 α,β,γ. 由题设

可知 $\alpha=\beta=\gamma$.

因为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

所以

$$3\cos^2\alpha=1,$$

因而

$$\cos^2\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

也就是

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

因此，向量 $\vec{a}$ 的方向余弦为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\text{或}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

例 2 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 始点坐标为 $A(1,0,-1)$，终点坐标为 $B(4,-4,11)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度和方向角.

解 因为向量

$$\overrightarrow{AB}=\{4-1,\ -4-0,\ 11+1\}=\{3,\ -4,12\}$$

所以模长为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=13.$$

又因 $\cos\alpha=\frac{3}{13}$，$\cos\beta=\frac{-4}{13}$，$\cos\gamma=\frac{12}{13}$，

所以 $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{3}{13}\right)$，$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{-4}{13}\right)$，$\gamma=\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$，

或 $\alpha=76°39'$，$\beta=107°55'$，$\gamma=22°37'$.

§8 向量的数量积

我们先考查力学中的一个例子.

设物体受重力 $\vec{f}$ 作用沿斜面下滑(图38). 重力的方向是

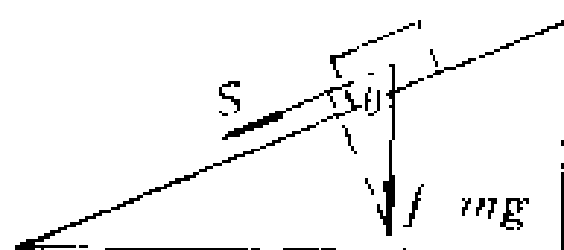


图 38

垂直向下的，而物体的位移$\vec{S}$的方向和斜面平行，重力方向和位移方向之间有一夹角 θ。由力学知道，重力所作的功可表示为

$$W=|\vec{f}|\ |\vec{S}|\cos\theta.$$

这里功W是一个数量。我们把这个数量称为力$\vec{f}$和位移$\vec{S}$的数量积。类似的情况在电学和其他学科中也常遇到。

下面，我们给出两个向量数量积的定义：

任意两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的模与它们夹角 φ 的余弦相乘积叫做**两个向量的数量积**，也称内积。$\vec{a}$，$\vec{b}$的数量积用记号$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示，或简单表示为$\vec{a}\ \vec{b}$。因此，

$$\vec{a}\ \vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\varphi.$$

1 向量的数量积具有下列几何性质。

1）两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$互相垂直的必要充分条件是它们的数量积等于零。

若向量$\vec{a}$和$\vec{b}$是互相垂直的，则它们的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，因而$\cos\varphi=0$，所以数量积

$$\vec{a}\ \vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\varphi=0.$$

反之，若数量积$\vec{a}\ \vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\varphi=0$，则 $\cos\varphi=0$，因而$\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以向量$\vec{a}$，$\vec{b}$是互相垂直的。

2）向量的数量平方等于它的长度平方。

数量积$\vec{a}\ \vec{a}$叫做**向量**$\vec{a}$**的数量平方**，用记号$\vec{a}^2$表示。

因为$\vec{a}\ \vec{a}=|\vec{a}|\ |\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$，而$\vec{a}\ \vec{a}=\vec{a}^2$，所以

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2.$$

3）两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在这个向量上射影的相乘积。

由于

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,$$

而

$$\text{射}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi,$$

所以

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{射}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

同理

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

4）向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的射影等于向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的单位向量的数量积.

由性质3）可知

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}$$

设向量$\vec{b}$的单位向量为$\vec{b}^{\circ}$，即$|\vec{b}^{\circ}|=1$，则得

$$\vec{a}\,\vec{b}^{\circ}=|\vec{b}^{\circ}|\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}=\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

2　向量的数量积具有下列基本运算规律.

1）交换律，即

$$\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}.$$

因为

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle,\ (\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\text{ 表示 }\vec{a},\vec{b}\text{ 的夹角})$$

$$\vec{b}\,\vec{a}=|\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\langle\vec{b},\vec{a}\rangle,$$

而　$|\vec{a}|\,|\vec{b}|=|\vec{b}|\,|\vec{a}|$，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\cos\langle\vec{b},\vec{a}\rangle$.

所以　$\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$.

2）结合律，即

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}).$$

根据几何性质3），则

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}).$$

因为　$\text{射}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=\lambda\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}$,

所以　$(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=\lambda|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}$.

又因　$|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\,\vec{b}$,

所以　$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda|\vec{b}|\,\text{射}_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b})$.

3）分配律，即

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}。$$

根据几何性质 4），则

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,射_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})。$$

因为

$$射_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=射_{\vec{a}}\vec{b}+射_{\vec{a}}\vec{c}。$$

所以
$$\begin{aligned}\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})&=|\vec{a}|\,射_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})\\&=|\vec{a}|\,(射_{\vec{a}}\vec{b}+射_{\vec{a}}\vec{c})\\&=|\vec{a}|\,射_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\,射_{\vec{a}}\vec{c}。\end{aligned}$$

又因 $|\vec{a}|\,射_{\vec{a}}\vec{b}=\vec{a}\vec{b}$，$|\vec{a}|\,射_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\vec{c}$，

所以 $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$。

根据数量积的基本运算规律，我们可以得到关于向量多项式数量积的乘法法则，就是逐项相乘。

3　数量积的坐标表示

若已知两个向量的坐标，则可用它们的坐标计算数量积。

如果已知两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的坐标为

$$\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\},\quad \vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

则它们的数量积可用下列公式计算：

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2。$$

事实上，我们把向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表成基本向量的线性组合。

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$

$$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}。$$

再把这两个等式右边逐项相乘计算 $\vec{a}\vec{b}$，即

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b}=&x_1x_2\vec{i}\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\vec{j}\\&+y_1z_2\vec{j}\vec{k}+z_1x_2\vec{k}\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\vec{k}。\end{aligned}$$

但，基本向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是两两相互垂直的单位向量，根据数量积的几何性质，则得

$$\left.\begin{array}{lll}\vec{i}\,\vec{i}=1, & \vec{i}\,\vec{j}=0, & \vec{i}\,\vec{k}=0,\\ \vec{j}\,\vec{i}=0, & \vec{j}\,\vec{j}=1, & \vec{j}\,\vec{k}=0,\\ \vec{k}\,\vec{i}=0, & \vec{k}\,\vec{j}=0, & \vec{k}\,\vec{k}=1.\end{array}\right\}$$

把这些数值代入上式，则得

$$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

由此可知，**两个向量的数量积等于它们的对应坐标乘积之和.**

当 $\vec{a}=\vec{b}$ 时，则得到向量 $\vec{a}$ 的数量平方

$$\vec{a}^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2.$$

由此也可得到向量 $\vec{a}$ 的模长公式

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

4　由上面的讨论可推出两个重要结果.

1°　两个向量 $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ 和 $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ 互相垂直的必要充分条件是

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

根据数量积的几何性质 1），已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 互相垂直的必要充分条件可写做 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

由此可知，**两个向量互相垂直的必要充分条件是它们的对应坐标乘积之和等于零.**

2°　两个向量 $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ 和 $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ 的夹角 φ 可用下列公式计算：

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

因为，根据数量积的定义，$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$，由此，则

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

而已知　$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$,

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},\quad |\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$$

所以，角 φ 的计算公式正确.

例 1 试证平行四边形对角线的平方和等于它各边的平方和。

证 我们把平行四边形的边和对角线看作向量（图39）。

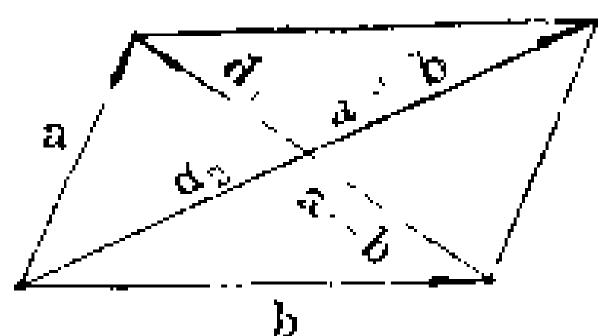


图 39

容易看出，$\vec{d_1}=\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{d_2}=\vec{a}+\vec{b}$，再求向量$\vec{d_1}$和$\vec{d_2}$的数量平方。

$$\vec{d_1}^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2,$$
$$\vec{d_2}^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2.$$

等式两边对应相加，则有

$$\vec{d_1}^2+\vec{d_2}^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2).$$

根据数量积的几何性质 3），则得

$$|\vec{d_1}|^2+|\vec{d_2}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2),$$

这就是所要证明的。

例 2 求向量 $\vec{a}=\{4,\ -1,\ 2\}$ 在向量 $\vec{b}=\{3,\ 1,\ 0\}$ 上的射影。

解 根据数量积的几何性质 4），向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的射影等于向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的单位向量的数量积，即

$$射_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}^\circ.$$

因为
$$\vec{b}^\circ=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

而
$$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10},$$

因此，
$$\vec{b}^\circ=\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}=\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\times3,\frac{1}{\sqrt{10}}\times1,\frac{1}{\sqrt{10}}\times0\right\}$$
$$=\left\{\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},0\right\}.$$

又因
$$\vec{a}\vec{b}^\circ=4\times\frac{3}{\sqrt{10}}+(-1)\times\frac{1}{\sqrt{10}}+2\times0$$
$$=\frac{11}{\sqrt{10}}=\frac{11}{10}\sqrt{10}.$$

所以　　射$_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{11}{10}\sqrt{10}$。

也就是，向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的射影为$\frac{11}{10}\sqrt{10}$。

例3　在 Oxy 坐标面上，求出与向量$\vec{R}=\{-4,3,7\}$垂直的单位向量。

解　设所求向量的坐标为$\{l, m, n\}$，因它在 Oxy 面上，所以 $n=0$，又因所求向量$\{l,m,n\}$与向量$\vec{R}=\{-4,3,7\}$垂直且为单位向量。所以它们必满足如下条件

$$-4l+3m=0,$$
$$l^2+m^2=1.$$

解此方程组得

$$l=\pm\frac{3}{5},\quad m=\pm\frac{4}{5}.$$

所以，所求向量为$\left\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right\}$和$\left\{-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right\}$。

例4　已知三点 $A(1,1,1)$，$B(2,2,1)$，$C(2,1,2)$，求$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的夹角。

解　先求出向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的坐标，

$$\overrightarrow{AB}=\{2-1,\ 2-1,\ 1-1\}=\{1,1,0\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{2-1,\ 1-1,\ 2-1\}=\{1,0,1\}.$$

然后利用公式　$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}$来求$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的夹角$\varphi$，

因为　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1+1\times0+0\times1=1$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

所以

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}。$$

因而　　$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

也就是，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$。

§9 向量的向量积

我们先考查物理学中的一个例子。

在一均匀磁场$\overrightarrow{B}$中（图40），有一单位长度的导线，导线上面有强度为$\overrightarrow{I}$的电流，在磁场作用下导线受到一个力$\overrightarrow{F}$的作用，这个力的大小为

$$|\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{I}|\,|\overrightarrow{B}|\sin\varphi.$$

这里φ是$\overrightarrow{I}$与$\overrightarrow{B}$正向的夹角。$\overrightarrow{F}$的方向垂直于$\overrightarrow{I}$和$\overrightarrow{B}$。$\overrightarrow{I}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{F}$的正向适合右手系。

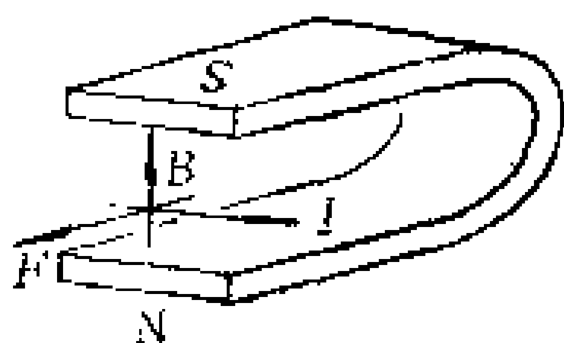


图 40

这种由两个已知向量经过上述方式得到另一种向量的情况，在其他问题中也经常遇到。例如计算刚体上一点受力作用时的力矩，计算绕固定轴转动的刚体上各点的运动速度等。综合这些情况，可概括出两个向量的向量积定义如下。

由下列三个条件所确定的向量，叫做向量 **a**和 **b** 的向量积，也称外积，并用记号 **a**× **b**或 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 表示。

1° 向量$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$的模$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\sin\varphi$。$\varphi$ 是向量$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$的夹角；

2° 向量$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$与向量$\overrightarrow{a}$及$\overrightarrow{b}$都垂直；

3° 向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$的方向合于右手系（图41）。

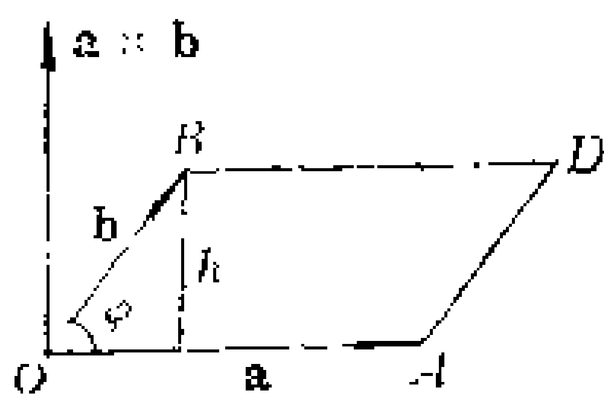


图 41

从向量积的定义，立即可以得到计算两个向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$夹角 φ 的公式，即

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|}.$$

下面，我们来研究向量积的一些性质。

1　向量的向量积具有下列几何性质。

1）两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线的必要充分条件是它们的向量积是零向量。

实际上，若向量$\vec{a}$和$\vec{b}$共线，则它们的夹角φ等于0或等于π，即$\sin\varphi=0$。

因而

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=0.$$

也就是，向量$\vec{a}\times\vec{b}$的模等于零，所以$\vec{a}\times\vec{b}$是零向量。

反之，当向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的向量积是零向量时，如果在向量$\vec{a}$，$\vec{b}$中，有一个是零向量，由于零向量的方向是任意的，所以总可以把$\vec{a}$，$\vec{b}$看做共线的。如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$都不是零向量，当$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=0$时，必有$\sin\varphi=0$，所以向量$\vec{a}$和$\vec{b}$共线。

2）两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的向量积的模$|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以$\vec{a}$，$\vec{b}$为边所构成的平行四边形的面积。

从图41可以直接看出，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}|h$。这里，$h=|\vec{b}|\sin\varphi$。而$|\vec{a}|h$恰好是平行四边形$OADB$的底$|\vec{a}|$与高$h$的乘积，也就是平行四边形$OADB$的面积。

2　向量的向量积具有下列基本运算规律。

1）反交换律，即

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \tag{1}$$

如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，则$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{b}\times\vec{a}$都是零向量，因面等式（1）成立。

如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，则向量$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{b}\times\vec{a}$是共线的，并且它们的模相等。因为向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$三个向量的方向是右旋的，因而向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{b}\times\vec{a}$三个向量的方向必是左旋的。所以向量$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{b}\times\vec{a}$的方向恰好相反。因此，等式（1）成立。

2）数乘结合律，即

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}). \tag{2}$$

容易看出，当 $\lambda=0$ 或向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时，（2）式是成立的。因为在这种情况下，等号两边都是零向量。

现在假设 $\lambda\neq 0$，并且向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，它们之间的夹角为 φ。这时，向量 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 的模等于 $|\lambda|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$。而向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 的模也等于 $|\lambda|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$，但角 φ 或者等于角 $\varphi(\lambda>0)$，或者等于角 $\pi-\varphi(\lambda<0)$。不论在哪种情况下，向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 的模都等于向量 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 的模。

根据向量积定义的第二个条件，两个向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 和 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 同时垂直于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$。因此，向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 和 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 是共线的。不仅如此，而且它们还是同方向的。为此，我们讨论下面两种情况：

1° 设 $\lambda>0$。这时，向量 $\lambda\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相同。在这种情况下，则向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同，而向量 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向也相同。所以，向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 和 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向相同，因而 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$，也就是等式（2）成立。

2° 设 $\lambda<0$。这时，向量 $\lambda\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反。在这种情形下，向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相反。而向量 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向也相反。所以，向量 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ 和 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向相同，因而 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$，也就是，等式（2）总成立。

3° 分配律，即

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}. \tag{3}$$

当向量 $\vec{a}$ 是零向量时，等式（3）显然成立，因为在这种情况下，等号两边都是零向量。

当向量 $\vec{a}$ 不是零向量时，我们需要讨论如下三种情况。

1° 向量 $\vec{a}$ 是单位向量，并且与向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 都垂直的情形。

因为向量 $\vec{a}$ 是单位向量，用 $\vec{a}^{\circ}$ 表示。把向量 $\vec{a}^{\circ}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 附着于同一始点 O（图42）。并设

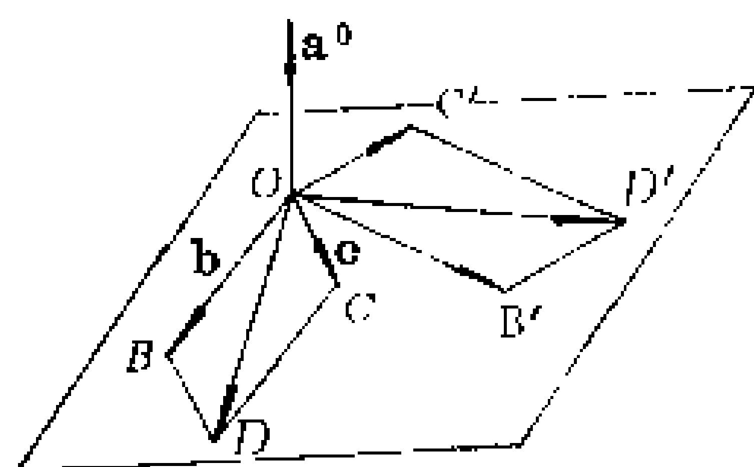


图 42

$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{C}$，

因而 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=\vec{b}+\vec{c}$。

用向量 $\vec{a}^\circ$ 与向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 和 $\vec{b}+\vec{c}$ 作向量积，并用下面记号：

$\overrightarrow{OB'}=\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OB}=\vec{a}^\circ\times\vec{b}$，

$\overrightarrow{OC'}=\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OC}=\vec{a}^\circ\times\vec{c}$，

$\overrightarrow{OD'}=\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OD}=\vec{a}^\circ\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\vec{a}^\circ\times(\vec{b}+\vec{c})$。

根据向量积的定义，则

$$|\overrightarrow{OB'}|=|\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OB}|=|\vec{a}^\circ|\,|\overrightarrow{OB}|\sin 90^\circ=|\overrightarrow{OB}|.$$

由此可知，把向量 $\overrightarrow{OB}$ 绕向量 $\vec{a}^\circ$ 旋转90°就得到 $\overrightarrow{OB'}$。而这个旋转，根据向量积定义的第三个条件，从向量 $\vec{a}^\circ$ 的终点看去必须是反时针的。同理，把向量 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OD}$ 绕向量 $\vec{a}^\circ$ 旋转90°就得到向量 $\overrightarrow{OC'}$ 和 $\overrightarrow{OD'}$。因此，把整个平行四边形 $OBDC$ 绕向量 $\vec{a}^\circ$ 旋转90°就得到图形 $OB'D'C'$，于是 $OB'D'C'$ 也是平行四边形。由此可以得出结论：

$$\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'},$$

或 $$\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OD}=(\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OB})+(\vec{a}^\circ\times\overrightarrow{OC}).$$

也就是 $$\vec{a}^\circ\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}^\circ\times\vec{b}+\vec{a}^\circ\times\vec{C} \qquad (*)$$

这就是说，当向量 $\vec{a}$ 是单位向量，并且垂直于向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 时，分配律是成立的。

2° 向量 $\vec{a}$ 是垂直于向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的任意向量的情形。

用 $\vec{a}^\circ$ 表示向量 $\vec{a}$ 的单位向量，则向量 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^\circ$。把等式(*)的两边乘以向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$，并且用向量 $\vec{a}$ 代替 $|\vec{a}|\vec{a}^\circ$，则得

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

这就是说，当向量 $\vec{a}$ 垂直于向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 时，分配律是成立的。

3° 三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是任意的情形。

我们把向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的始点附着于同一点O。过点O作垂

直于向量$\vec{a}$的平面 π。然后，过向量$\vec{b}$、$\vec{c}$和$\vec{b}+\vec{c}$的终点引平行于向量$\vec{a}$的直线。设它们与平面π分别交于点 B, C 和 D（图43）。

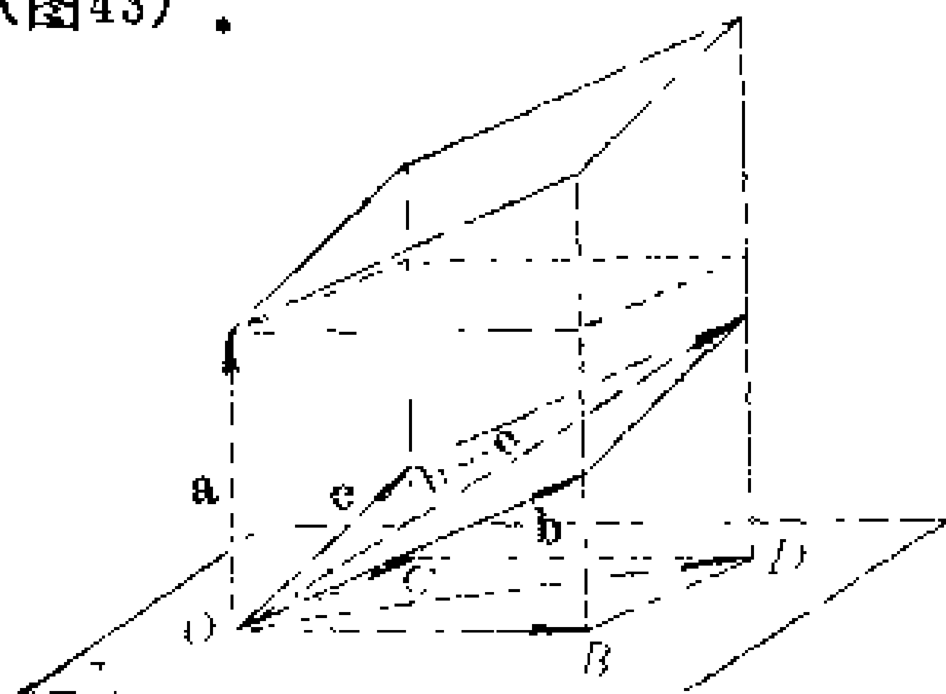


图 43

我们考虑向量积$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{a}\times\overrightarrow{OB}$，它们是相等向量。这是因为，第一，向量$\vec{a}$和$\vec{b}$构成的平行四边形的面积等于向量$\vec{a}$和$\overrightarrow{OB}$构成的矩形的面积，所以向量$\vec{a}\times\vec{b}$和向量$\vec{a}\times\overrightarrow{OB}$的模相等。第二，向量$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{a}\times\overrightarrow{OB}$的方向都垂直于同一个平面，并且向量$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{a}\times\overrightarrow{OB}$都与它们的相乘向量构成右手系，所以$\vec{a}\times\overrightarrow{OB}=\vec{a}\times\vec{b}$。同理，$\vec{a}\times\overrightarrow{OC}=\vec{a}\times\vec{c}$，$\vec{a}\times\overrightarrow{OD}=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$。因为向量$\vec{a}$垂直于向量$\overrightarrow{OB}$和$\overrightarrow{OC}$，根据情形2°，则

$$\vec{a}\times\overrightarrow{OD}=\vec{a}\times\overrightarrow{OB}+\vec{a}\times\overrightarrow{OC}.$$

因此

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

综上所述，分配律是成立的。

从向量积的分配律，可得到**向量多项式向量积的乘法法则，就是逐项相乘**。

3　向量积的坐标表示

两个向量的向量积，可用它们的坐标表示出来。

如果已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的坐标为

$$\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\},\quad \vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

则它们的向量积可用下面的公式确定：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\},$$

事实上，我们把向量$\vec{a}$，$\vec{b}$表成基本向量的线性组合，即

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$
$$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

根据向量积的性质，把这两个等式的右边逐项相乘，则得

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}=&x_1x_2(\vec{i}\times\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\times\vec{j})+x_1z_2(\vec{i}\times\vec{k})\\&+y_1x_2(\vec{j}\times\vec{i})+y_1y_2(\vec{j}\times\vec{j})+y_1z_2(\vec{j}\times\vec{k})\\&+z_1x_2(\vec{k}\times\vec{i})+z_1y_2(\vec{k}\times\vec{j})+z_1z_2(\vec{k}\times\vec{k}).\end{aligned}$$

由于$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$是两两互相垂直的单位向量，根据向量积的定义和性质，则有

$$\left.\begin{array}{lll}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},\end{array}\right\}$$

这个结果也可用向量的向量乘积表（右表）来表示。其中每两个基本向量的向量积位于相应的行和列的交叉处。

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

基本向量乘积表

把这些基本向量的向量积的结果代入上式，则得

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

或 $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k},$$

因此 $$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

为了便于记忆，也可把向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的向量积写成行列式的形式，即

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.$$

4　由上面的讨论可推出两个重要结果。

1°　两个向量$\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$和$\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$共线的必要充分条件是

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

因为，我们已知，两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的必要充分条件是它们的向量积是零向量，因此，向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的每个坐标都应当等于零，也就是

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0.$$

由此得到

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

这个结果也可叙述为，两个向量共线的必要充分条件是它们的对应坐标成比例。

2° 若三角形 ABC 的顶点坐标为 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，$C(x_3, y_3, z_3)$，则它的面积为

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

我们把三角形的边 AB 和 AC 看作向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$。由于向量积 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 的模等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 所构成的平行四边形的面积，而三角形 ABC 的面积等于平行四边形面积的一半。也就是

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

求出向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标为

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}.$$

由此得到

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

因而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}.$$

例 1 计算向量积$(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$。

解 $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$

$$=(2\vec{a}-3\vec{b})\times\vec{a}+(2\vec{a}-3\vec{b})\times 2\vec{b}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{a})-3(\vec{b}\times\vec{a})+4(\vec{a}\times\vec{b})-6(\vec{b}\times\vec{b}).$$

因为，共线向量的向量积是零向量，所以$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$，$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$。

因此 $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=4(\vec{a}\times\vec{b})-3(\vec{b}\times\vec{a})$

$$=4(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{a}\times\vec{b})=7(\vec{a}\times\vec{b}).$$

需要注意，在向量的向量积计算中，不能用向量平方的概念。

例 2 求垂直于向量$\vec{a}=\{2,2,1\}$和$\vec{b}=\{4,5,3\}$的单位向量。

解 因为向量$\vec{a}\times\vec{b}$是垂直于向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的，因此所求单位向量必与向量$\vec{a}\times\vec{b}$共线。

而

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}.$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3.$$

于是，所求单位向量为

$$\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}.$$

同样， $-\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$

也是所求单位向量。

例 3 已知三点 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,5)$，$C(3,2,-5)$，求这三点作成的三角形的面积。

解 三角形 ABC 的面积是以 AB，AC 为邻边所构成的

平行四边形面积的一半，而平行四边形的面积等于 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

由于 $\overrightarrow{AB}=\{1,\ -3,\ 2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,\ 0,\ -8\}$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 0 & -8\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ -8 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{24, 12, 6\},$$

所以 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$.

因此 三角形的面积 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{6\sqrt{21}}{2}=3\sqrt{21}$.

§10 向量的混合积

我们已经知道了向量的两种乘法，就是数量积和向量积. 现在，我们来研究第三种乘法，所谓向量的混合积.

如果已知任意三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 先作向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$, 然后再作它与向量 $\vec{c}$ 的数量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$, 这样所得到的数叫做三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合积.

1 三个向量的混合积具有下列几何性质.

1) 三个向量共面的必要充分条件是它们的混合积等于零.

当向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 共面时，若向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线，则向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是零向量，因而它与向量 $\vec{c}$ 的数量积等于零. 所以混合积等于零. 若向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 不共线，则向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是垂直于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量，它也必垂直向量 $\vec{c}$, 因而它与向量 $\vec{c}$ 的数量积等于零，所以混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ 也等于零.

当混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ 等于零时，或者向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 等于零向量；或者向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的数量积等于零. 若 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是零向量，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，因而向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 共面. 若 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的数量积等于零，则向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直，因而向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 共面.

2) 三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的混合积的绝对值等于由这三个向

量所构成平行六面体的体积。并且当向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是右手系时，混合积为正数，当向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是左手系时，混合积是负数。

根据数量积的定义

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}|\text{射}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}.$$

如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$组成右手系，则向量$\vec{c}$和$\vec{a}\times\vec{b}$之间的角是锐角，这时，射$_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$是正值，并且等于向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成的平行六面体的高 h（图44）。也就是射$_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=h$；而$|\vec{a}\times\vec{b}|=S$ 是这个平行六面体的底面积。因此，

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}|\text{射}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=S\cdot h=V,$$

这里的V是平行六面体的体积。

如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$组成左手系，则向量$\vec{c}$和$\vec{a}\times\vec{b}$之间的角是钝角。这时，射$_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$是负值，也就是射$_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=-h$（图45）。在这种情形下，

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=-V.$$

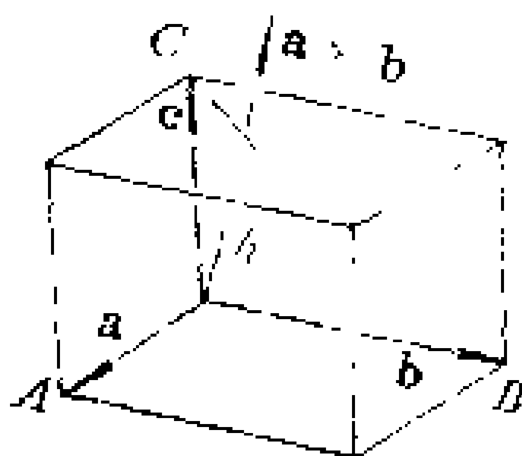


图 44

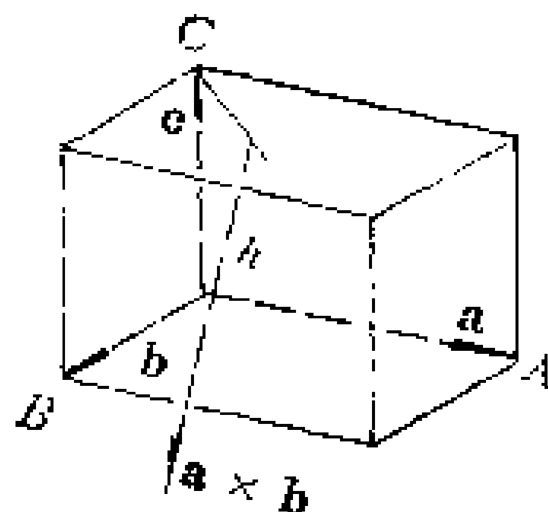


图 45

于是，证明了三个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积的绝对值等于这三个向量所构成的平行六面体的体积。而且，如果三个向量组成右手系，则$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}>0$；如果组成左手系，则$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}<0$。

2　三个向量的混合积具有下列基本运算规律。

1）对于混合积$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$，若顺次轮换所有因子，则其值不变。若互换两个因子，则其值只改变符号，即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})\vec{c}$$

$$= -(\vec{c}\times\vec{b})\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{c})\vec{b}.$$

因为三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积等于 $\pm V$. 当三个因子顺次轮换时，旋转方向不变，因此它们的混合积不变。当其中两个因子互换时，只是旋转方向改变，因此它们的混合积只是改变符号。

2）三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积与以向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 作向量积或以向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 作向量积无关，即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}).$$

因为数量积具有交换性质，所以

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a},$$

根据性质 1），

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}.$$

因此

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}).$$

根据上述运算规律，无论是混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ 或是 $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ 都可用更简单的符号 $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ 或 $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ 表示，在保持轮换次序的条件下，向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 中哪两个作向量积都可以。

3　混合积的坐标表示

三个向量的混合积，可用它们的坐标表示出来。

如果已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的坐标为

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\},\ \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\},\ \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\},$$

则它们的混合积可用下列公式计算：

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

实际上，用混合积的定义 $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$. 而向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的坐标为

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

再求向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的数量积，即得

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4　由上面的讨论可以推出两个重要的结果。

1°　三个向量

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\ \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\},\ \vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$$

共面的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

实际上，根据混合积的几何性质 1）以及混合积的坐标表达式，立刻就可得到上述结果。

2°　如果四面体 $ABCD$ 顶点的坐标是

$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$，则它的体积V可用下面公式计算：

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

如果向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$是右手系，则等号右边取"+"；如果是左手系，则取"-"号．符号的这种取法是为了保证体积V是正值。

实际上，根据初等几何定理已知，四面体 $ABCD$ 的体积等于三个向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$所构成的平行六面体体积的$\frac{1}{6}$（图46）．而这三个向量的坐标是

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\},$$
$$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1\}.$$

根据混合积的坐标表示式，则得

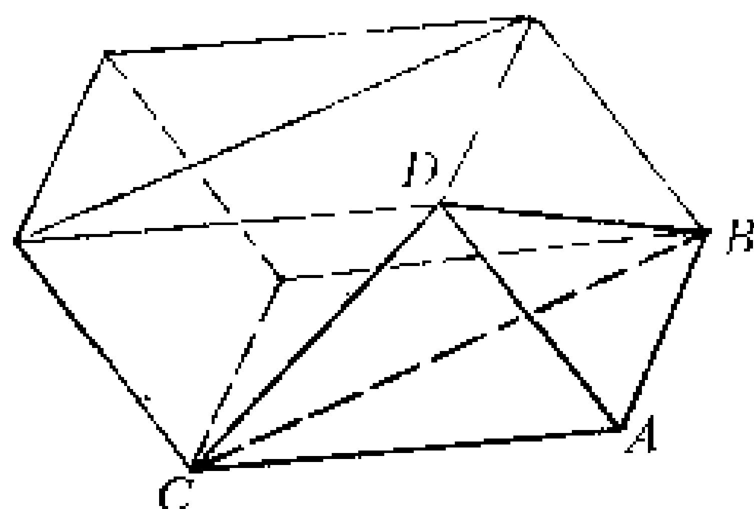


图 46

$$V=\pm\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}$$

$$=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

例 1 求顶点为 $P_1(1,2,3)$，$P_2(2,4,1)$，$P_3(1,-3,5)$，$P_4(4,-2,3)$的四面体的体积。

解 这个四面体的体积是以$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_1P_4}$为棱的平行六面体体积的$\frac{1}{6}$。因为

$\overrightarrow{P_1P_2}=\{1,2,-2\}$，$\overrightarrow{P_1P_3}=\{0,-5,2\}$，$\overrightarrow{P_1P_4}=\{3,-4,0\}$，所以

$$\overrightarrow{P_1P_2}\,\overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-10.$$

因此，四面体体积是

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\,\overrightarrow{P_1P_3}\,\overrightarrow{P_1P_4}\right|=\frac{10}{6}=1\frac{2}{3}.$$

例 2 已知四面体的体积$V=5$，它的三个顶点是$A(2,1,-1)$，$B(3,0,1)$，$C(2,-1,3)$，而第四个顶点 D 在 Oy 轴上，试求点 D 的坐标。

解 因为点 D 在 Oy 轴上，设它的坐标为 $D(0,y,0)$。又因

$\overrightarrow{AB}=\{1,-1,2\}$，$\overrightarrow{AC}=\{0,-2,4\}$，$\overrightarrow{AD}=\{-2,y-1,1\}$，所以

$$5=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix}=\mp\frac{1}{6}(4y-2).$$

解之，得 $y=8$或-7。

因此，四面体第四个顶点的坐标为$D_1(0,8,0)$或$D_2(0,-7,0)$。

§11 二重向量积

我们现在来研究向量的另一种乘法，就是所谓向量的二重向量积。

若已知三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，先作向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$，然后再作它与向量 $\vec{c}$ 的向量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$，这样所得到的向量叫做三个向量的二重向量积。

根据向量积定义的第二个条件可知，这个向量与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共面，并且垂直于向量 $\vec{c}$。

下面，我们来导出二重向量积的一个基本公式。

三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的二重向量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 可表示为分别与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线的两个向量的差，即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}).$$

实际上，设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的坐标为

$$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\},\quad \vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\},\quad \vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\},$$

并设它们的二重向量积的坐标是

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\{x, y, z\}.$$

根据向量积的坐标表示，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1\}.$$

应用同一公式，可得 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 的 x 坐标：

$$\begin{aligned}x&=(z_1x_2-z_2x_1)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)y_3\\&=x_2(y_1y_3+z_1z_3)-x_1(y_2y_3+z_2z_3).\end{aligned}$$

在等号右边加减 $x_1x_2x_3$，则得

$$x=x_2(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)-x_1(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3).$$

这个等式可改写为

$$x=x_2(\vec{a}\,\vec{c})-x_1(\vec{b}\,\vec{c}).$$

同理，可得

$$y=y_2(\vec{a}\,\vec{c})-y_1(\vec{b}\,\vec{c}).$$

$$z=z_2(\vec{a}\,\vec{c})-z_1(\vec{b}\,\vec{c}).$$

我们把向量的二重向量积写成基本向量线性组合的形式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

再把 x, y, z 的表达式代入这个等式，然后就 $\vec{a}\vec{c}$ 和 $\vec{b}\vec{c}$ 并项，则得

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})(\vec{a}\vec{c})$$
$$-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(\vec{b}\vec{c}).$$

也就是

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c}).$$

我们可把二重向量积的这个基本公式叙述为：**三个向量的二重向量积等于中间向量与两侧两个向量数量积的乘积减去括弧中其余一个向量与另两个向量数量积的乘积.**

需要注意，二重向量积与混合积不同，二重向量积是与相乘顺序有关的. 例如二重向量积 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ 与 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 一般是不同的.

实际上，

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{b})\times\vec{a}$$
$$=\vec{b}(\vec{c}\vec{a})-\vec{c}(\vec{b}\vec{a}).$$

也就是

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

因此，在一般情形下

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

例 1　试证拉格朗日恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d}\\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d}\end{vmatrix}.$$

证　设 $\vec{c}\times\vec{d}=\vec{e}$，于是

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{e}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{e})$$
$$=\vec{a}[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]$$
$$=\vec{a}[\vec{c}(\vec{b}\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\vec{c})]$$
$$=(\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d})-(\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}).$$

也就是

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d}\\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d}\end{vmatrix}.$$

例2 已知三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，试证：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

证 在二重向量积中进行所有的轮换，则得

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\vec{c})\vec{a},$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{b}\vec{a})\vec{c}-(\vec{c}\vec{a})\vec{b},$$

$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=(\vec{c}\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}.$$

把这三个等式相加，即得

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

习　　题

1．设 $ABCDEF$ 为正六边形，O是中心，试问在向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EF}$和$\overrightarrow{FA}$中，哪几个向量是相等的？

2．在一个平行四边形的边上，在一个等边三角形的边上可以作哪些相等向量？

3．在平行六面体 $ABCD—EFGH$ 上，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$，试把此六面体的四条对角线向量$\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CE}$ 和$\overrightarrow{DF}$ 用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示出来。

4．试证非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成三角形的必要充分条件是$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$。

5．已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，且$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=12$，试求$|\vec{a}+\vec{b}|$ 与 $|\vec{a}-\vec{b}|$。

6．已知$|\vec{a}|=11$，$|\vec{b}|=23$，$|\vec{a}-\vec{b}|=30$，试求$|\vec{a}+\vec{b}|$。

7．用几何作图法证明等式：$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}$。

8．试问二非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足什么条件时，以下各式才成立．

（1）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；（2）$|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$；

（3）$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$；（4）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（5）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；（6）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$。

9．设 $ABCD$ 是空间的一个四边形，各边中点依次为 P,Q,R,S，

试证：

（1）$PQRS$ 是平行四边形。

（2）$PQRS$ 的周长等于 $ABCD$ 的对角线长度之和。

10．利用向量证明：$\triangle ABC$ 的任意两边中点连线平行于第三边，且等于第三边的一半。

11．设 O 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点，D，E 和 F 分别为三个边的中点，试证：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}.$$

12．设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，O 为空间任意一点，且 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，试证：

（1）$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$。

（2）$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$。

13．已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线，试求它们角平分线上的单位向量 $\vec{c}^{\circ}$。

14．若向量 $\vec{a}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$，$\vec{b}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$，$\vec{c}=6\vec{e}_1-2\vec{e}_2+6\vec{e}_3$，其中 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 不共面，试证：$\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线。

15．在下列各组向量中，哪组向量线性相关，哪组向量线性无关。

（1）$\vec{0}$，$\vec{a}$；

（2）$\vec{a}$，$\vec{b}$（$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 不平行）；

（3）$\vec{a}$，$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面。

（4）$\vec{a}$，$\vec{b}$、$\vec{c}$ 中，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 不平行；

（5）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 两两平行；

（6）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$、$\vec{d}$ 中，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面；

（7）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 中，每三个不共面；

（8）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ 中，每三个不共面。

16．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$。试证：$A,B,D$ 三点在一条直线上。

17．在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-(4\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{CD}=-(5\vec{a}+3\vec{b})$，其中 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，试证：$ABCD$ 为梯形。

18．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}$，试判断 $\vec{c}$，$\vec{d}$ 是否线性相关。

19．已知三个非零向量 $\vec{a}=m\vec{e}_1-n\vec{e}_2$，$\vec{b}=p\vec{e}_2-m\vec{e}_3$，$\vec{c}=n\vec{e}_3-p\vec{e}_1$，其中 m，n，p 不全为零，试证：向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面。

20．已知四个向量 $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{n}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}$，$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$，

$\vec{q}=\vec{b}-\vec{c}$，试求 $\vec{m}$、$\vec{n}$，$\vec{p}$ 和 $\vec{q}$ 之间的线性关系式。

21．设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，向量 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，且 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{c}$ 有共同始点 O，试证：向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的终点在一条直线上的必要充分条件是 $\lambda+\mu=1$。

22．已知 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 为线性无关的三个向量，且 $\vec{m}=\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$，$\vec{n}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$，$\vec{p}=2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$，试把向量 $\vec{S}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$，表示成 $\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{p}$ 的线性组合。

23．已知向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 线性无关，且 $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2$，$\vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 全不为零，试证：向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 线性相关的必要充分条件是 $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$。

24．在三角形 ABC 的 BC 边上取点 L，CA 边上取点 M，AB 边上取点 N，试求以向量 $\overrightarrow{AL}$、$\overrightarrow{BM}$ 和 $\overrightarrow{CN}$ 为边构成三角形的条件。

25．在四面体 $OABC$ 中，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点 P 是 $\triangle ABC$ 上的任意一点，试证：若 $\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$，则 $\lambda+\mu+\nu=1$。

26．设向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|=10$，轴 l 与向量 $\vec{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，试求 $\vec{a}$ 在轴 l 上的射影。

27．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是三个单位向量，且向量 $\vec{a}$ 与轴 l 的夹角为 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，向量 $\vec{b}$ 与轴 l 的夹角为 2φ，向量 $\vec{c}$ 与轴 l 的夹角为 3φ，试求向量 $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$ 在轴 l 上的射影。

28．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 在同一轴 l 上的射影为

射$_l\vec{a}=5$，射$_l\vec{b}=-3$，

射$_l\vec{c}=-8$，射$_l\vec{d}=6$。

能否断定这些向量构成封闭折线？

29．已知三个不共面的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在两个不同的轴 l，m 上的射影为

射$_l\vec{a}=2$，射$_l\vec{b}=-1$，射$_l\vec{c}=5$，

射$_m\vec{a}=-3$，射$_m\vec{b}=2$，射$_m\vec{c}=4$。

试求同时垂直于两个轴 l，m 的向量 $\vec{d}$。

30．设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在三个不共面的轴 l，m，n 上的射影为

射$_l\vec{a}=3$，射$_l\vec{b}=2$，射$_l\vec{c}=2$，

射$_m\vec{a}=9$，射$_m\vec{b}=-4$，射$_m\vec{c}=8$，

射$_n\vec{a}=0$，射$_n\vec{b}=-5$，射$_n\vec{c}=1$。

试证：向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性相关，并求其线性关系式。

31. 根据下列条件，试求点 B 的未知坐标.

(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|\overrightarrow{AB}|=11$；

(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|\overrightarrow{AB}|=5$；

(3) $A(7,0,10)$，$B(7,y,5)$，$|\overrightarrow{AB}|=3$.

32. 已知向量 $\vec{a}=\{4,-4,7\}$，其终点坐标为 $(2,-1,7)$，试求向量 $\vec{a}$ 的始点坐标及模 $|\vec{a}|$.

33. 已知点 $A(-1,5,-10)$，$B(5,-7,8)$，$C(2,2,-7)$，$D(5,-4,2)$，试验证向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，并写出它们的线性关系式.

34. 若向量 $\vec{a}=\{3,-5,8\}$ 和 $\vec{b}=\{-1,1,z\}$ 的和与差的模相等，试求 z.

35. 已知点 $A(4,-1,3)$，$B(-2,1,-3)$，$C(2,-1,-2)$，如果：

(1) 以点 B 为始点，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CA}$，试求点 D 的坐标；

(2) 以点 A 为始点，以 $F(x,3,z)$ 为终点，$\overrightarrow{AF}=y\overrightarrow{BC}$，试求 x,y,z.

36. 已知 $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$，且向量 $\vec{c}$ 在向量 $\vec{a}=\{2,-3,6\}$ 与向量 $\vec{b}=\{-1,2,-2\}$ 的角平分线上，试求 $\vec{c}$ 的坐标.

37. 已知点 $A(4,-2,-1)$，$B(1,1,2)$，$C(1,-3,6)$，试求：

(1) $\triangle ABC$ 的重心坐标；

(2) 分线段 $\overline{AB}$ 为 $3:1$ 的内分点 P 的坐标.

38. 已知线段 $\overline{AB}$ 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 分成三等分，试求两端点 A,B 的坐标.

39. 试判断下列各组角能否作为向量的方向角.

(1) $\alpha=55°$，$\beta=60°$，$\gamma=120°$；

(2) $\alpha=45°$，$\beta=135°$，$\gamma=60°$；

(3) $\alpha=90°$，$\beta=150°$，$\gamma=60°$.

40. 一向量 $\vec{a}$ 与 Ox 轴的负向及 Oy 轴，Oz 轴的正向构成相等的锐角，试求向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

41. 已知点 $A(2,5,-1)$，$B(5,1,11)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦.

42. 模长为 2 的向量 $\vec{a}$ 与 Ox 轴的夹角是 $\frac{\pi}{4}$，与 Oy 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，试求向量 $\vec{a}$ 的坐标.

43. 已知向量 $\vec{a}=\{3,2,4\}$，$\vec{b}=\{-1,1,2\}$，$\vec{c}=\{1,4,8\}$，若向量 $\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 的方向与向量 $\vec{c}$ 相同，试求系数 λ 与 μ.

44. 试证下列各题（其中各向量均为非零向量）：

(1) $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a}\vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$；

(2) 向量 $\vec{a}$ 垂直于向量 $\vec{d}=(\vec{a}\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

45. 试证：菱形的两条对角线互相垂直.

46. 已知三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 两两垂直，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$。试求向量 $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的模及它与三已知向量的夹角余弦.

47. 试求满足下列条件的向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

(1) $\vec{a}+3\vec{b}$ 垂直于 $7\vec{a}-5\vec{b}$，$\vec{a}-4\vec{b}$ 垂直于 $7\vec{a}-2\vec{b}$；

(2) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{7}$.

48. 计算下列各题：

(1) 试求向量 $\vec{a}=\{8,4,1\}$ 在向量 $\vec{b}=\{2,-2,1\}$ 上的射影；

(2) 若 $\vec{a}=\{-2,1,z\}$，$\vec{b}=\{-1,0,3\}$，且 $\vec{a}$ 垂直于 $\vec{b}$，试求 z；

(3) 已知点 $A(3,-4,-2)$，$B(2,5,-2)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$ 在与 Ox 轴构成角 $\alpha=60°$，与 Oy 轴构成角 $\beta=120°$，而与 Oz 轴构成钝角 γ 的轴 l 上的射影.

49. 已知三个单位向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，试计算 $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

50. 利用向量的性质证明：

(1) 三角形余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$；

(2) 三角函数的二角和余弦公式：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

51. 设向量 $\vec{a}=\{1,-1,1\}$，$\vec{b}=\{3,-4,5\}$，$\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$. λ 为实数. 试证使模 $|\vec{x}|$ 最小的向量 $\vec{x}$ 垂直于向量 $\vec{b}$.

52. 有一个 100 达因的力作用于一物体上，力的方向余弦为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 试求此力将物体从点 $P(1,2,-1)$ 沿直线移动到点 $Q(2,5,1+3\sqrt{2})$ 处所做的功.

53. 指出下列各有序向量组中，哪些符合右手系（其中 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线）.

(1) $\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}$；(2) $\vec{b}\times\vec{a}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$；

(3) $\vec{b}$，$\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}$；(4) $\vec{a}$，$\vec{b}\times\vec{a}$，$\vec{b}$；

(5) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$；(6) $\vec{a}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$.

54. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，试计算：

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})^2$；(2) $[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2$；

(3) $|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})|$.

55. 已知 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\vec{b}=-3$，试求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

56. 试证：

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$;

(2) 对任意向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，若 $\vec{m}=\vec{a}\times\vec{d}$，$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{d}$，$\vec{p}=\vec{c}\times\vec{d}$，则 $\vec{m}$、$\vec{n}$、$\vec{p}$ 共面.

57. 计算下列各题：

(1) 试求向量 $\vec{a}=\{2,-2,1\}$ 和 $\vec{b}=\{2,3,6\}$ 之间的夹角正弦值和以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积；

(2) 已知点 $A(1,2,0)$，$B(3,0,-3)$，$C(5,2,6)$，试求 $\triangle ABC$ 的面积.

(3) 试求以向量 $\vec{a}=\{2,1,-1\}$ 和 $\vec{b}=\{1,-2,1\}$ 为邻边的平行四边形对角线的夹角正弦值.

58. 已知向量 $\vec{x}$ 垂直于二向量 $\vec{a}=\{2,-3,1\}$，$\vec{b}=\{1,-2,3\}$，且满足条件 $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$，试求向量 $\vec{x}$.

59. 设 $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$ 为有共同始点 O 的三个非零向量，试证：$\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1=\vec{0}$ 的必要充分条件是 $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$ 的终点在一条直线上.

60. 计算下列各题：

(1) 已知向量 $\vec{a}=\{2,-1,5\}$，$\vec{b}=\{-1,3,0\}$，$\vec{c}=\{3,1,-2\}$，试求混合积 $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$；

(2) 试求以点 $A(2,-1,1)$，$B(5,5,4)$，$C(3,2,-1)$，$D(4,1,3)$ 为顶点的四面体体积；

(3) 已知 $|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=3$，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\vec{c}$ 同时垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$，试求 $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

61. 已知四面体的顶点为 $A(2,3,1)$，$B(4,1,-2)$，$C(6,3,7)$，$D(-5,-4,8)$，试求从顶点 D 所引四面体的高 h.

62. 试证：

(1) 三向量 $\vec{a}=\{3,4,5\}$，$\vec{b}=\{1,2,2\}$，$\vec{c}=\{9,14,16\}$ 共面；

(2) 四点 $A(1,0,1)$，$B(4,4,6)$，$C(2,2,3)$，$D(10,14,17)$ 在同一平面上.

63. 试证：

(1) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\lambda\vec{a}-\mu\vec{b})$ (λ, μ 为任意实数)；

（2）$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$；

（3）$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$ 的必要充分条件是

$(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})=0$。

64．已知五个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，若满足 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，$\vec{a}\times\vec{d}=\vec{e}$，则 $\vec{b}\,\vec{e}+\vec{c}\,\vec{d}=0$。

65．已知向量 $\vec{a}=\{3,0,-1\}$，$\vec{b}=\{2,4,3\}$，$\vec{c}=\{-1,3,2\}$，$\vec{d}=\{2,0,1\}$，试求：

（1）$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$；（2）$(\vec{a}\times\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d})$。

66．试证空间任意四个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 满足下列关系：

（1）$(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{a}+(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d})\vec{b}+(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}+(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b})\vec{d}=0$；

（2）$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{a}\times\vec{d})$

$+(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{b}\times\vec{d})=0$。

67．设非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，试证三向量 $\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ 正交。

68．已知向量 $\vec{a}$ 垂直于 $\vec{b}$，试求：

$\vec{a}\times\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\}$。

69．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，试求满足方程 $\vec{a}\,\vec{x}=1$，$\vec{b}\times\vec{x}=\vec{c}$ 的向量 $\vec{x}$。

70．一直线通过点 $M(-3,-2,8)$，且平行于向量 $\vec{a}=\{3,2,-2\}$，试求点 $P(1,-1,-2)$ 到直线的距离 d。

第三章　平面和直线

平面和直线是在我们的生活、学习和生产实践中用得较多的两种几何图形，也是空间解析几何的重要内容。在这一章中，我们将以向量代数为工具来研究平面和直线的各种不同形式的方程，平面和直线之间的位置关系以及一些简单的应用。

§1　平面的一般方程

我们首先来证明：在直角坐标系中，**每个平面的方程都是一次方程。**

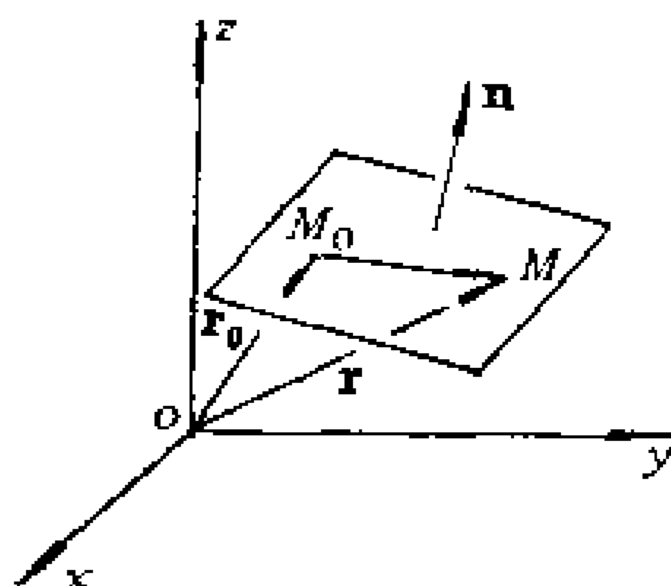


图 47

假定在直角坐标系中，已知任意一个平面π，我们来证明这个平面的方程是一次的。在平面π(图47）上任取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，再取垂直于平面π的任意向量 $\vec{n}=\{A, B, C\}$（当然不是零向量）。向量 $\vec{n}$ 叫做**平面的法向量**。点M_0和法向量 $\vec{n}$ 完全确定了平面 π 的位置。

设 $M(x, y, z)$是平面 π 上的任意一点。因$\vec{n}\perp\pi$，所以点M在平面π上的条件是$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$。

如果用$\vec{r}_0$和$\vec{r}$分别表示点M_0和M的径向量（$\vec{r}$也叫流动向径），则$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$。因此，得

$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$$

或

$$\vec{n}\vec{r}+D=0 \tag{1}$$

这里 $D = -\vec{n}\,\vec{r}_0$.

现在，我们把等式（1）用坐标形式表示出来。因为 $\vec{r}-\vec{r}_0=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$，$\vec{n}=\{A,\ B,\ C\}$，根据向量垂直的必要充分条件，则得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

这就是所求的平面方程。

把方程（2）变形为

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$$

令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$，则得

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

由此可知，平面 π 的方程确实是一次方程。我们把形如（3）的方程叫做**平面的一般方程**。形如（1）的方程叫做**平面一般方程的向量形式**。

下面，我们再来证明：在直角坐标系中，每个一次方程确定一个平面。

假设在直角坐标系中，已知任意一个一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (4)$$

所谓任意是说系数 A，B，C，D 可取任意实数，但 A，B，C 不能同时为零。我们来证明方程（4）确定一个平面。

设 x_0，y_0，z_0 是方程（4）的一组解，也就是这三个数满足这个方程。用 x_0，y_0，z_0 代换方程（4）左边的流动坐标，我们便得到恒等式

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D\equiv 0 \qquad (5)$$

从等式（4）减去恒等式（5），则得

$$A(x-x_0)-B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (6)$$

而方程（6）与方程（2）一样，它是过点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且具有法向量 $\vec{n}=\{A,\ B,\ C\}$ 的平面方程。容易看出，方程（6）与方程（4）是同解方程，也可说是等价的，这是因为方程（6）是从方程（4）减去恒等式（5）得到的，而方程（4）

又可看做方程（6）加上恒等式（5）得到的。所以，方程（4）也是一个平面方程。因此，每个一次方程都确定一个平面。

由上面的证明，可以概括为：**每个平面的方程都是一次方程，而每个一次方程又都确定一个平面**。也就是空间的平面与一次方程之间建立了对应关系。这个命题有时也称为关于平面的**基本定理**。

现在，我们来研究一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

的某些特别情形所确定的平面。

1° 当 $D=0$时，方程为

$$Ax+By+Cz=0$$

它所确定的平面通过坐标原点（图48），因为这时，坐标系原点坐标（0,0,0）满足平面的方程。

2° 当 $C=0$ 时，方程为

$$Ax+By+D=0$$

法向量 $\vec{n}=\{A,\ B,\ 0\}$ 垂直于 Oz 轴。这时，平面平行于 Oz 轴（图49）。若再有 $D=0$，则平面通过 Oz 轴。

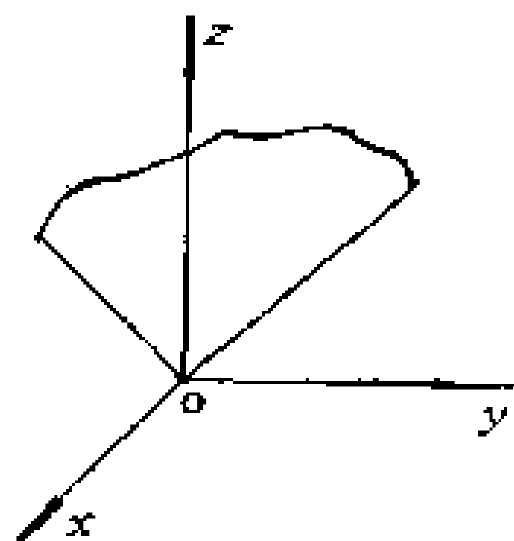


图 48

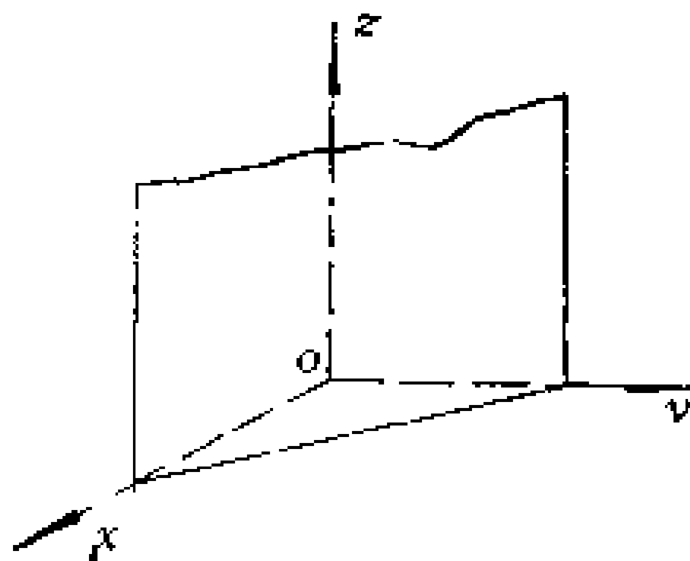


图 49

3° 当 $B=0$ 时，方程为

$$Ax+Cz+D=0$$

因为法向量 $\vec{n}=\{A,\ 0,\ C\}$垂直于 Oy 轴，所以这个方程所确定的平面平行于 Oy 轴（图50）。若再有 $D=0$，则平面通过

Oy 轴。

4° 当 $A=0$ 时，方程为

$$By+Cz+D=0$$

因法向量 $\vec{n}=\{0, B, C\}$ 垂直于 Ox 轴，所以平面平行于 Ox 轴（图51）。若再有 $D=0$，则平面通过 Ox 轴。

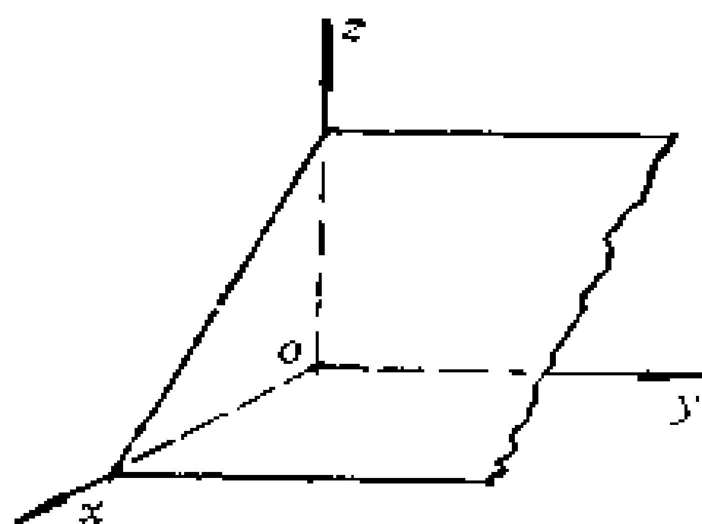


图 50

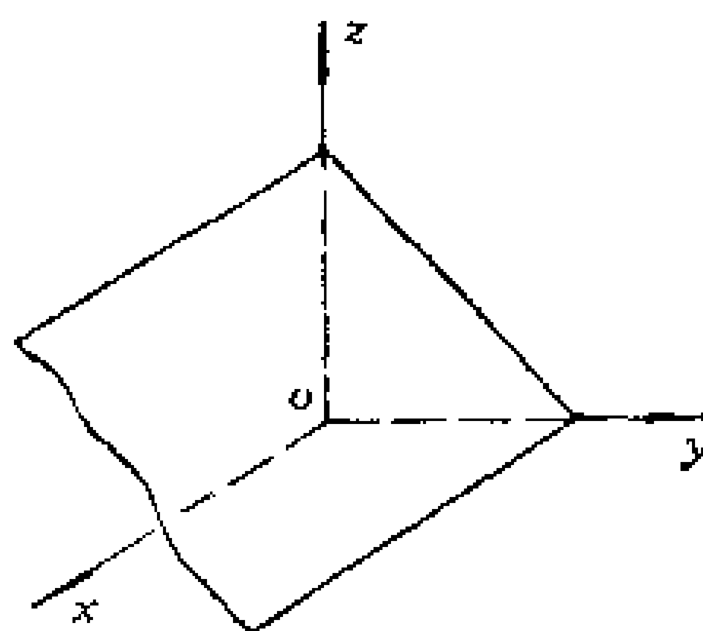


图 51

5° 当 $B=0$，$C=0$ 时，方程为

$$Ax+D=0$$

法向量 $\vec{n}=\{A, 0, 0\}$ 平行于 Ox 轴，这时平面平行于 Oyz 坐标面（图52）。

6° 当 $A=0$，$C=0$ 时，方程为

$$By+D=0$$

这时法向量 $\vec{n}=\{0, B, 0\}$ 平行于 Oy 轴，而平面平行于 Oxz 坐标面（图53）。

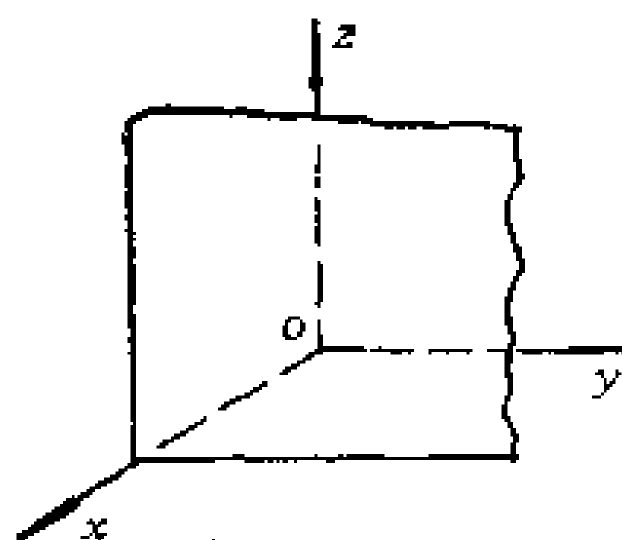


图 52

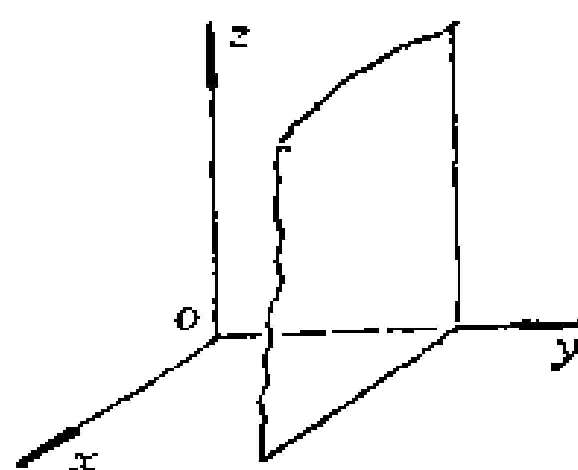


图 53

7° 当 $A=0$, $B=0$ 时，方程为

$$Cz+D=0$$

而法向量 $\vec{n}=\{0, 0, C\}$平行于 Oz 轴，所以平面平行于Oxy坐标面（图54）.

8° 在5°、6°、7°三种情况中，如果再有$D=0$，那末方程具有形状 $Ax=0$, $By=0$, $Cz=0$或 $x=0$, $y=0$, $z=0$. 它们所确定的平面分别与坐标面 Oyz, Ozx, Oxy 重合（图55）.

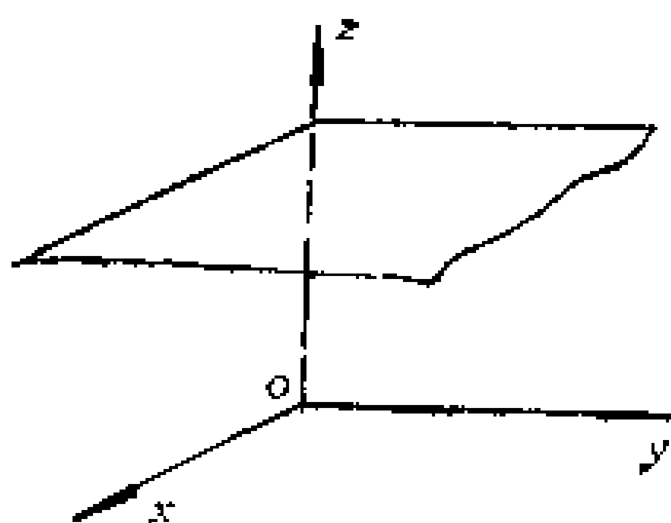


图 54

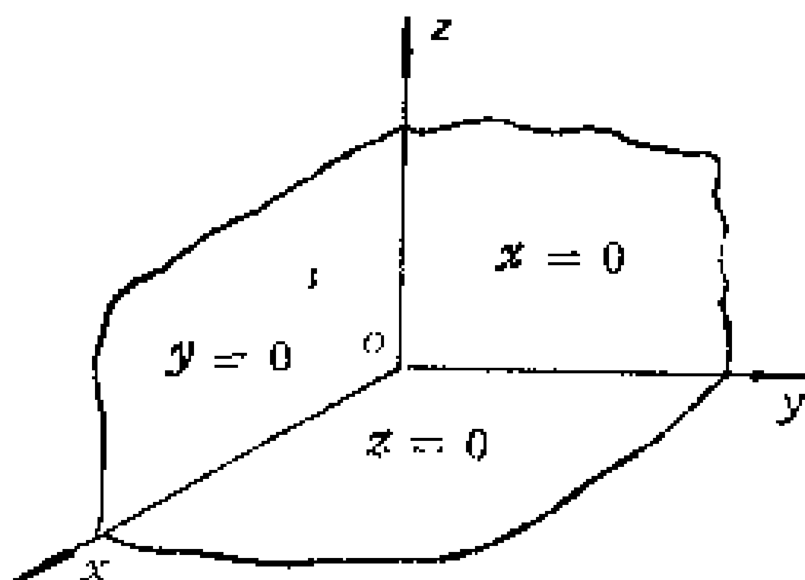


图 55

例1 已知一个平面通过点 $P_1(3, -2, 1)$并且垂直于P_1与点$P_2(6, 2, 7)$的连线，求平面方程.

解 我们可把点 P_1, P_2 的连线作为所求平面的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}=\{3, 4, 6\}$. 因而，所求平面过点$P_1(3, -2, 1)$且以$\overrightarrow{P_1P_2}=\{3, 4, 6\}$为法向量. 所以，平面的方程为

$$3(x-3)+4(y-2)+6(z-1)=0$$

或
$$3x+4y+6z-7=0$$

例2 一个平面通过 Ox 轴和点 $M_0(4, -3, -1)$，求这个平面的方程.

解 先求出平面的法向量$\vec{n}$. 由已知条件可知，向量$\vec{n}$垂直于 Ox 轴和$\overrightarrow{OM_0}$，所以

$$\vec{n}=\vec{i}\times\overrightarrow{OM_0}=\vec{i}\times(4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k})=j-3k$$

或
$$\vec{n}=\{0, 1, -3\}$$

所求平面过点 $O(0, 0, 0)$，因此它的方程为

$$0(x-0)+1(y-0)-3(z-0)=0$$

即　　$y-3z=0$

例 3　一个平面过两点 $A(1, 1, 1)$ 和 $B(0, 1, -1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求此平面的方程。

解　先求此平面的法向量 $\vec{n}$，由已知条件可知　$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$，面 $\overrightarrow{AB}=\{-1, 0, -2\}$。同时，向量 $\vec{n}$ 必垂直于已知平面 $x+y+z=0$ 的法向量 $\vec{n_1}=\{1, 1, 1\}$，即　$\vec{n} \perp \vec{n_1}$

所以　　$\vec{n}=\overrightarrow{AB} \times \vec{n_1}=\{2, -1, -1\}$

又因平面过点 $A(1, 1, 1)$，所以，所求平面的方程为

$$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$$

化简，得

$$2x-y-z=0$$

例 4　一平面通过原点，面且与平面 $2x-y+5z+3=0$ 和 $x+3y-z-7=0$ 都垂直，求此平面方程。

解　因为平面过原点，所以可设它的方程为

$$Ax+By+Cz=0$$

又因为这个平面与两个已知平面都垂直，所以有

$$2A-B+5C=0$$

$$A+3B-C=0$$

由此解出 A 和 B，得到 $A=-2C$，$B=C$。

将 A、B 代入所设方程，整理后得

$$2x-y-z=0$$

即为所求平面方程。

§2　三点确定的平面方程

设已知不在同一直线上的三个点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$，因而它们能够确定一个平面。现在，

我们来导出这个平面的方程。

在这个平面上，任取一点 $M(x, y, z)$（图56），于是，向量 $\overrightarrow{M_1M}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 是共面的。反之，如果向量 $\overrightarrow{M_1M}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面，则点 M 在 M_1，M_2，M_3 所确定的平面上。这就是说，点 M 在已知三点确定的平面上的必要充分条件是向量 $\overrightarrow{M_1M}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面，因此，它们的混合积等于零，即

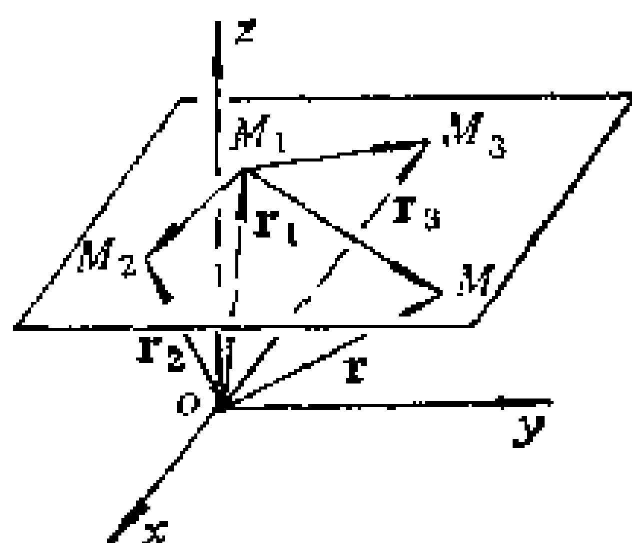


图 56

$$(\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}) = 0 \tag{1}$$

若每个点分别用径向量表示，如 $\vec{r}_1(M_1)$，$\vec{r}_2(M_2)$，$\vec{r}_3(M_3)$，$\vec{r}(M)$，则（1）式可写为

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\ (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\ (\vec{r}_3-\vec{r}_1) = 0 \tag{2}$$

再把（2）式用坐标形式表示，则得

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

等式（3）就是三点 M_1，M_2，M_3 所确定的平面方程。而等式（2）是这个平面方程的向量形式。

在特殊情形下，我们容易导出平面的所谓截距式方程。

设一个平面在三个坐标轴的交点为 $M_1(a, 0, 0)$，$M_2(0, b, 0)$，$M_3(0, 0, c)$（图57）。因此，所求平面的方程可写成等式（3）的形式，也就是

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

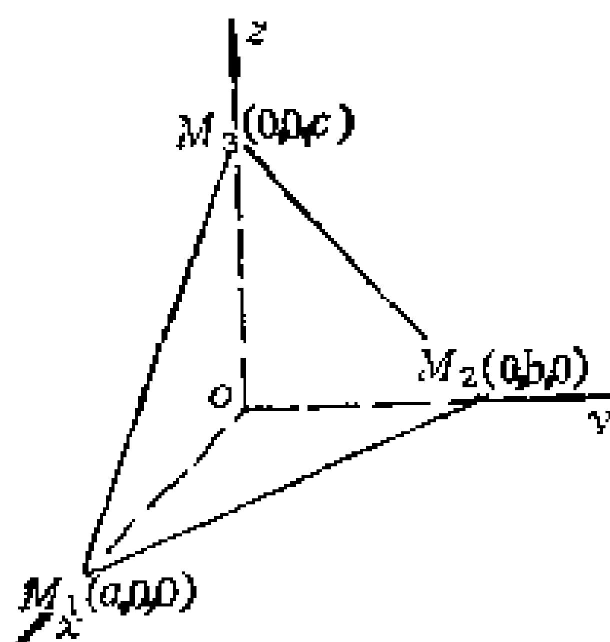


图 57

把它展开，可写成

$$bcx + acy + abz = abc$$

或

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

具有这种形状的方程我们叫做**平面的截距式方程**.

例 1 一个平面通过三点 $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(-1, 0, 0)$, $M_3(3, 0, 1)$, 求平面的方程.

解 由等式（3）. 则得所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

把它展开，得

$$x + 5y - 4z + 1 = 0$$

例 2 把平面方程

$$2x + 15y - 3z - 6 = 0$$

化为截距式方程.

解 把常数项移到右端并用 6 除各项，得

$$\frac{x}{3} + \frac{5y}{2} - \frac{z}{2} = 1$$

还需要把第二项的 5 移到分母中，第三项的负号也移到分母中，则得

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{2}{5}} + \frac{z}{-2} = 1$$

这就是平面的截距式方程.

例 3 已知平面在 Oy、Oz 轴上的截距分别为 30, 10, 并且与向量 $\vec{r} = \{2, 1, 3\}$ 平行，试求这个平面的截距式方程.

解 设已知平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{30} + \frac{z}{10} = 1$$

它与 Ox、Oy、Oz 轴的交点分别为 $A(a, 0, 0)$, $B(0, 30, 0)$,

$C(0, 0, 10)$. 因为平面与向量 $\vec{r}$ 平行，所以向量$\vec{AB}$、$\vec{BC}$、$\vec{r}$共面，而

$$\vec{AB}=\{-a, 30, 0\}, \vec{BC}=\{0, -30, 10\},$$

因此
$$\begin{vmatrix} -a & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

解出 a，得 $a=-6$. 于是所求方程为

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{30}+\frac{z}{10}=1$$

§3 平面的法线式方程

现在，我们来研究另一种平面方程，所谓平面的法线式方程。

设已知任意平面 π，过坐标原点作直线 n垂直于平面 π，把直线 n 叫做平面 π 的法线。并用P 表示 n 与 π的交点(图58)．在法线上，我们指定从O 点到P 点的方向为正．如果点 P 与点 O 重合，也就是如果已知平面通过原点时，则法线的正向可任意选取．我们用α, β, γ表示法线与坐标轴所成的角，用p 表示线段OP的长度，

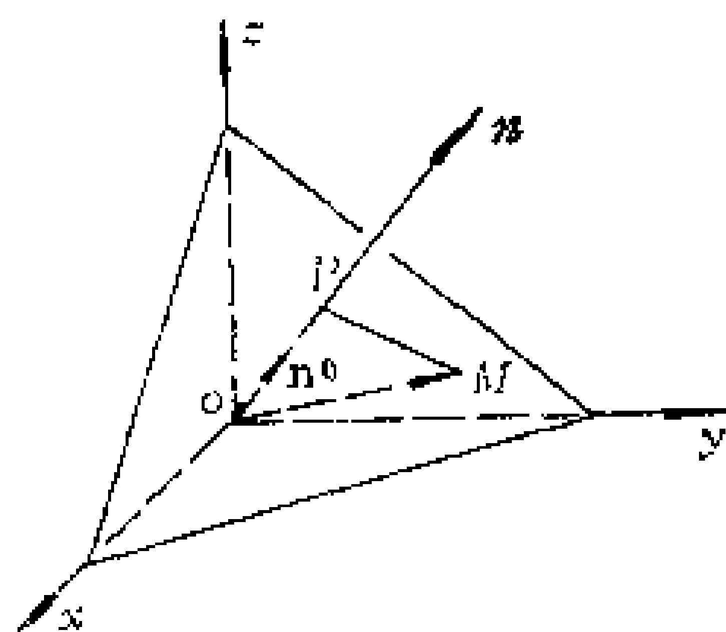


图 58

用$\vec{n^\circ}$表示法线方向上的单位向量．因此，$\vec{n^\circ}$的坐标$\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$以及 p都是已知数，所以平面 π的位置是确定的．下面，我们来导出平面 π 的方程．为此，我们在平面 π 上任取一点$M(x, y, z)$，容易看出，点M的径向量$\vec{r}$在法线上的射影等于线段$\overline{OP}$ 的代数值，又因为有向线段$\overline{OP}$ 的方向与法线的正向

一致．所以这个线段的代数值 p是正数．因此，有 射$_{n}\vec{r}=p$ 或

$$射_{n}\vec{r}=\vec{n}^{\circ}\vec{r}=p$$

因此得到

$$\vec{n}^{\circ}\vec{r}-p=0 \qquad (1)$$

我们再把等式（1）用坐标形式表示出来．因为

$$\vec{n}^{\circ}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},\quad \vec{r}=\{x,\ y,\ z\},$$

所以等式（1）可写成

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (2)$$

这就是已知平面 π 的方程．写成形式（2）的方程叫做**平面的法线式方程**．方程（1）是**平面的法线式方程的向量形式**．

在方程（2）中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是法线的方向余弦，也是法线方向上的单位向量的坐标，p 是从坐标原点到已知平面的距离．因此从方程（2）可以看出，平面的法线式方程的主要特征是：1° **流动坐标系数的平方和等于1；2° 常数项是负的．**

现在我们来研究，如何把平面的一般方程化为法线式方程．

设 $Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$

是某个平面的一般方程，而

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (4)$$

是它的法线式方程．

因为方程（3）和（4）确定同一个平面，所以这两个方程的系数成比例．也就是说，如果以某数μ 乘方程（3）的各项，我们便得方程

$$\mu Ax+\mu By+\mu Cz+\mu D=0$$

而且它与方程（4）完全一致，因而有

$$\mu A=\cos\alpha,\quad \mu B=\cos\beta,\quad \mu C=\cos\gamma,\quad \mu D=-p \qquad (5)$$

为了求得乘数 μ，我们把前三个等式的两边各自平方并对应相

加，则得

$$\mu^2(A^2+B^2+C^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

所以

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (6)$$

因为用数μ乘平面的一般方程，则可把它化为法线式方程，所以数μ叫做这个方程的**法化因子**. 法化因子的符号可用等式（5）的第四式确定. 因为$\mu D=-p$，所以μD是一个负数. 因此，**法化因子的符号，常与要化为法线式方程的常数项的符号相反**. 若常数项$D=0$，则法化因子的符号可任意选取.

例1 把平面的一般方程$2x-3y+6z+49=0$化为法线式方程，并求出$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$和p.

解 因为$A=2$，$B=-3$，$C=6$，$D=49>0$，所以

$$\mu=\frac{1}{-\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=-\frac{1}{7}$$

把已知方程的每项系数乘以$-\frac{1}{7}$，则得法线式方程为

$$-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-7=0$$

由此得到

$$\cos\alpha=-\frac{2}{7},\ \cos\beta=\frac{3}{7},\ \cos\gamma=-\frac{6}{7},\ p=7.$$

例2 已知平面方程$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$在三个坐标轴上的截距分别为$a$，$b$，$c$，求证

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

证 令$y=0$，$z=0$ 则 $x=\frac{p}{\cos\alpha}$，即$a=\frac{p}{\cos\alpha}$，

同理 $b=\frac{p}{\cos\beta}$， $c=\frac{p}{\cos\gamma}$

把上面三个等式改写为

$$\frac{1}{a}=\frac{\cos\alpha}{p},\quad \frac{1}{b}=\frac{\cos\beta}{p},\quad \frac{1}{c}=\frac{\cos\gamma}{p}.$$

由此可得

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{p^2}=\frac{1}{p^2}$$

§4 点到平面的距离

平面的法线式方程可以用来解决点到平面的距离问题。

设已知任意平面 π，作它的法线 OP。再设 M' 是空间的任意一点，δ 是从已知平面到 M' 的有向距离（图59）。我们把数 δ 叫做点 M' 对已知平面的离差。

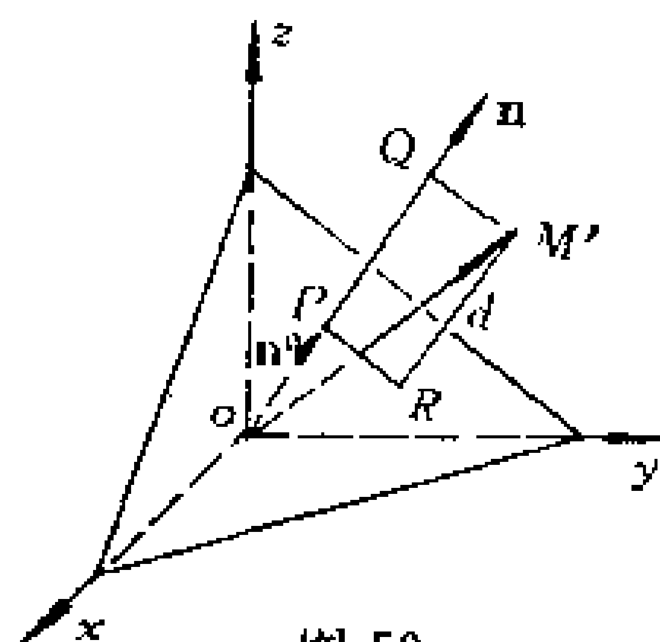


图 59

如果点 M' 和坐标原点在已知平面的异侧，则向量 $\overrightarrow{RM'}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 共线，且与 $\overrightarrow{OP}$ 的正向相同，这时离差有正值；如果点 M' 和坐标原点在已知平面的同侧，则向量 $\overrightarrow{RM'}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 共线且与 $\overrightarrow{OP}$ 的负向相同，这时离差有负值。因此可知，点 M' 到已知平面的距离 $d=|\delta|$。

如果已知点 $M'(x', y', z')$ 和平面的法线式方程

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

则点 M' 对这个平面的离差可用下面的公式计算

$$\delta=x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma-p \tag{1}$$

实际上，我们作点 M' 在法线上的射影，设 M' 的射影为 Q。由此则得

$$\delta=PQ=OQ-OP$$

这里 PQ，OQ，OP 是在法线上有向线段 $\overline{PQ}, \overline{OQ}, \overline{OP}$ 的代数值。但，$OQ=$射$_n\overrightarrow{OM'}=\vec{n}^\circ\vec{r'}$，$OP=p$，所以

$$\delta = \overrightarrow{n^{\circ}}\,\overrightarrow{r'} - p \tag{2}$$

而
$$\overrightarrow{n^{\circ}}\,\overrightarrow{r'} = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma \tag{3}$$

由（2）和（3），则得

$$\delta = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$$

不难看出，$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$不外是把已知平面的法线式方程左边的流动坐标代以 M' 点的坐标。

因此，如果我们需要求一点到一平面的距离，只要把这个平面的法线式方程左边的流动坐标代之以 M' 点的坐标，求出离差，然后取其绝对值即可。

例 1 求点$M(1, 2, 3)$到平面

$$2x - 2y + z - 3 = 0$$

的距离。

解 求出法化因子 μ。

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{1}{3}$$

把平面方程化为法线式方程

$$\frac{1}{3}(2x - 2y + z - 3) = 0$$

即
$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

点对平面的离差为

$$\delta = \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 - 1 = -\frac{2}{3}$$

负号是表示点M与坐标原点在已知平面的同侧。所求距离为

$$d = |\delta| = \frac{2}{3}$$

例 2 试求两个平行平面

$$\pi_1:\ 3x + 6y - 2z - 7 = 0$$

$$\pi_2:\ 3x + 6y - 2z + 14 = 0$$

间的距离。

解 因为两个平行平面的法向量为$\vec{n} = \{3, 6, -2\}$，而

$D_1=-7<0$，所以原点在平面 π_1 的法向量所指的另一侧。而 $D_2=14>0$，所以原点在平面 π_2 的法向量所指的同一侧。因此，原点必在两个平行平面之间。

又因原点到平面 π_1 的距离为

$$d_1=\frac{|-7|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{7}{7}=1$$

原点到平面 π_2 的距离为

$$d_2=\frac{|14|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{14}{7}=2$$

所以，两个平面之间的距离为

$$d=d_1+d_2=3$$

此题也可用另法解答：在两个平行平面中的任意一个平面上找出一点，求出这点到另一平面的距离，这个距离就是两个已知平面之间的距离。

例 3 已知两个平面

$$\pi_1:\ 2x-3y+\sqrt{3}z+4=0$$

$$\pi_2:\ 3x+2y-2\sqrt{3}z-5=0$$

求它们组成的两个二面角的角平分面的方程。

解 平面 π_1 和 π_2 有两个角平分面，设为 π_3,π_4。在角平分面上的点到 π_1，π_2 的距离相等。设 $P(x,y,z)$ 是角平分面上的点，若点 P 到 π_1 和 π_2 的距离分别为 d_1，d_2，则角平分面 π_3，π_4 上的点分别满足方程

$$d_1=d_2,\quad d_1=-d_2$$

但

$$d_1=\frac{2}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z+1$$

$$d_2=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y-\frac{2\sqrt{3}}{5}z-1$$

所以

$$\pi_3:\ \frac{2}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z+1=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y-\frac{2\sqrt{3}}{5}z-1$$

即 π_3 的方程为

$$-2x-23y+13\sqrt{3}z+40=0$$

而 π_4: $\frac{2}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z+1=-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}y+\frac{2\sqrt{3}}{5}z+1$

即 π_4 的方程为

$$22x-7y-3\sqrt{3}z=0$$

§5 两个平面的夹角

现在，我们来研究两个平面的夹角以及它们之间的位置关系。

已知两个平面，它们法向量之间的夹角叫做**已知两个平面的夹角**。

如果已知两个平面的方程为

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{1}$$

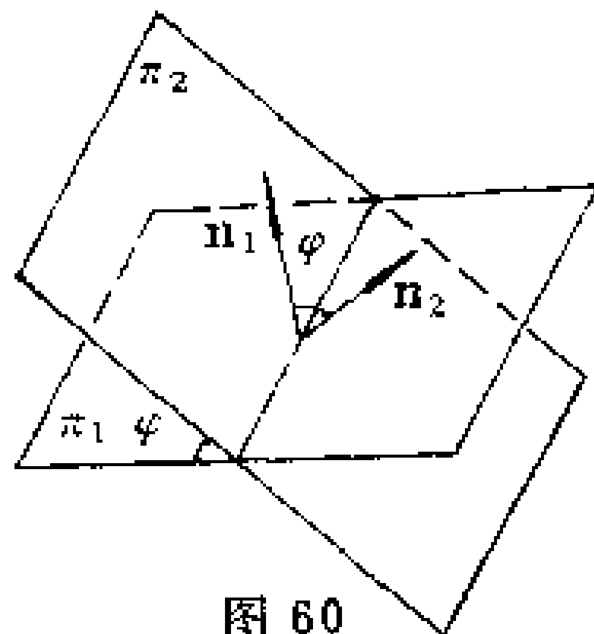


图 60

根据定义要计算两个平面的夹角，只要计算它们的法向量的夹角（图60）即可。为此，我们写出平面 π_1，π_2的法向量的坐标

$$\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\},\quad \vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$$

根据计算两个向量夹角的公式，则得

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

如果为得到两个平面夹角中的锐角，只要取 $\cos\varphi$ 绝对值所确定的角 φ 即可。

求两个平面的夹角，实际上也是确定两个平面的位置关系。下面，我们再来研究两个平面位置关系的几种特殊情形。

1° 若两个平面互相垂直，则它们的法向量也垂直；反之，也成立。

因为，两个平面法向量互相垂直的必要充分条件就是这两个平面（1）互相垂直的必要充分条件．所以，两个平面（1）互相垂直的必要充分条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

2° 若两个平面互相平行，则它们的法向量共线；反之，也成立。

因为，两个平面法向量共线的必要充分条件就是这两个平面互相平行的必要充分条件，所以，两个平面（1）互相平行的必要充分条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

3° 我们进一步来证明，已知两个平面（1）重合的必要充分条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2} \qquad (2)$$

我们先证明必要条件．若两个平面重合，则它们的法向量共线，因此

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

如果用 λ 表示它们的比值，则得

$$A_1=\lambda A_2,\quad B_1=\lambda B_2,\quad C_1=\lambda C_2$$

若 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是第一个平面上的任意点，则它必在第二个平面上，所以

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$$

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$$

以 λ 乘第二个等式两边，然后与第一个等式比较，则得 $D_1=\lambda D_2$。

因此 $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

充分条件是显然的．因为若等式（2）成立，则已知两个

平面的方程是等价的，所以两个平面重合。

例1 求两个平面 $2x-y+z-6=0$ 和 $x+y+2z-5=0$ 的夹角。

解 已知两个平面的法向量分别为

$$\vec{n}_1=\{2,\ -1,\ 1\},\ \vec{n}_2=\{1,\ 1,\ 2\},$$

所以

$$\cos\varphi=\frac{2\times 1+(-1)\times 1+1\times 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2}$$

因此，所求交角为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$。

例2 试证平面 $x+y-z-1=0$ 与平面 $2x+2y-2z+3=0$ 平行。

证 因为这两个平面的法向量分别为 $\vec{n}_1=\{1,1,\ -1\}$，$\vec{n}_2=\{2,\ 2,\ -2\}$，而且它们满足共线条件

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}$$

所以这两个平面平行。

例3 试证两个平面 $x+y+z=0$ 与 $x+y-2z+3=0$ 互相垂直。

证 因为这两个平面的法向量分别为 $\vec{n}_1=\{1,1,\ 1\}$ 和 $\vec{n}_2=\{1,\ 1,\ -2\}$，而且满足垂直条件

$$1\times 1+1\times 1+1\times(-2)=0$$

所以这两个平面垂直。

§6 三个平面的交点

设已知三个平面 π_1，π_2，π_3，它们的方程为

$$\begin{aligned}\pi_1:&\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:&\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ \pi_3:&\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{aligned}\qquad(1)$$

为了求出它们的交点，需要求这三个方程关于 x，y，z的解，也就是方程组（1）的解. 关于方程组（1）的解，可能有以下几种情况：

1° 若方程组（1）的行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0 \tag{2}$$

则方程组（1）有唯一解. 在这种情况下，三个平面有唯一交点.

2° 当 $\Delta=0$，并且矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

的秩等于3. 在这种情况下，方程组（1）是不相容的. 这时两个平面的交线平行于第三个平面. 上面提到的所谓矩阵，就是如（3）形式的一种排列. 所谓矩阵的秩，是指矩阵的不等于零的行列式中的最大阶数.

3° 当 $\Delta=0$，矩阵（3）的秩和行列式（2）矩阵的秩等于2. 在这种情况下，方程组（1）中的一个方程是另两个方程的线性组合，因而三个平面通过一条直线.

4° 当 $\Delta=0$，并且行列式矩阵的秩等于1，而矩阵（3）的秩等于2. 在这种情况下，三个平面互相平行.

5° 当 $\Delta=0$，并且行列式矩阵和矩阵（3）的秩都等于1. 在这种情况下，由方程组（1）的任何两个方程都可得到第三个方程. 因此，三个平面是重合的.

如果读者对矩阵不熟悉，可暂把2°，3°，4°，5°几种情形略去.

例1 求三个平面

π_1: $x-y+z=0$

π_2: $x+2y-1=0$

π_3: $x+y-z+2=0$

的交点。

解　因系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

所以，π_1，π_2，π_3 有唯一交点。

解 π_1，π_2，π_3 构成的方程组，则得交点坐标为

$x=-1$，$y=1$，$z=2$。

例 2　求三个平面

π_1: $x-y+2z-1=0$

π_2: $2x-2y+4z+5=0$

π_3: $3x-3y+6z-4=0$

的交点。

解　因系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}=0$$

所以，三个平面没有公共点。

由于矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

的秩等于 1，而矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 4 & 5\\ 3 & -3 & 6 & -4\end{pmatrix}$$

的秩等于 2，所以三个平面互相平行，但彼此不重合。

§7 面束和面把

面束和面把的方程对于求平面方程问题很有用.

1 面束

通过一条直线 p的所有平面构成的集合叫做平面束，简称面束，直线 p叫做面束的轴（图61）.

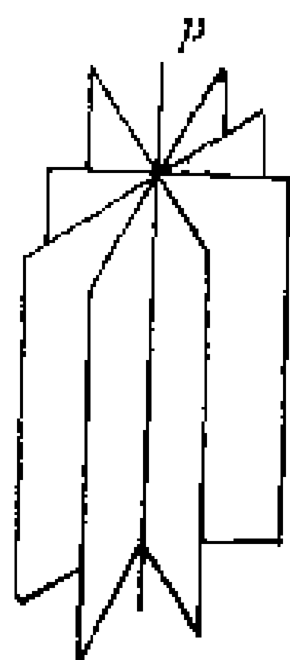


图 61

我们来导出面束的方程. 设已知交于直线 p的两个平面

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

α, β是不同时为零的任意实数，则

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$
$$+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (1)$$

就是以直线 p为轴的面束方程.

我们想按下面三个步骤来证明这个事实.

1° 关系式（1）是一次方程，也就是它确定一个平面.

若把关系式（1）变形为

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+(\alpha D_1+\beta D_2)=0$$

则可看出，x, y, z 的系数不能同时等于零. 因为，若 $\alpha A_1+\beta A_2=0$, $\alpha B_1+\beta B_2=0$, $\alpha C_1+\beta C_2=0$，则$\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{C_1}{C_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$，又因 α β不同时为零，例如$\alpha\neq0$，则$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$，即已知两个平面平行而不能确定直线，这与假设矛盾. 因此，关系式（1）是一次方程，也就是（1）确定一个平面.

2° 对于任意的 α 和 β，方程（1）所确定的平面必通过直线 p.

因为在已知直线 p 上的任意点的三个坐标 x_0, y_0, z_0 必满足方程（1），因此，直线上的点都在方程（1）确定的平面上，也就是方程（1）确定的平面通过直线 p。

3° 只要适当选取 α 和 β，方程（1）常可确定通过直线 p 的一个平面。

我们在空间任取一点 $M'(x', y', z')$，M' 不在直线 p 上。如果点 M' 的坐标满足方程（1），即

$$\alpha(A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1) + \beta(A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2) = 0 \qquad (2)$$

则方程（1）确定通过点 M' 的平面。因为点 M' 不在直线 p 上，所以两个数

$$A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1 \text{ 和 } A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2$$

中至少有一个不等于零。因此，等式（2）不是恒等式，而是以 α, β 为未知数的方程，若 $A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2 \neq 0$，则（2）式可写为

$$\beta = -\frac{A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1}{A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2}\alpha$$

当 α 取任意非零实数时，β 就随之确定，把 α, β 的值代入方程（1），便确定通过点 M' 的平面。

由1°, 2°, 3°的证明可知，方程（1）确是以 p 为轴的平面束的方程。

为了便于应用平面束方程解决实际问题，可把方程（1）变为简单的形式，如 $\alpha \neq 0$, 可令 $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, 则方程（1）就变为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (3)$$

但在方程（3）中，已经排除了 $\alpha = 0$ 的情形，所以方程（3）不能确定平面束里的平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$。

2　面把

通过一点 M_0 的所有平面构成的集合叫做平面把，简称面把。点 M_0 叫做面把中心。

现在，我们导出以点$M_0(x_0, y_0, z_0)$为中心的面把方程。

我们取过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的一个平面π（图62）。设$\vec{n}=\{A, B, C\}$为平面π的法向量，$M(x, y, z)$是平面π上的任意一点。我们已知，平面π的方程为

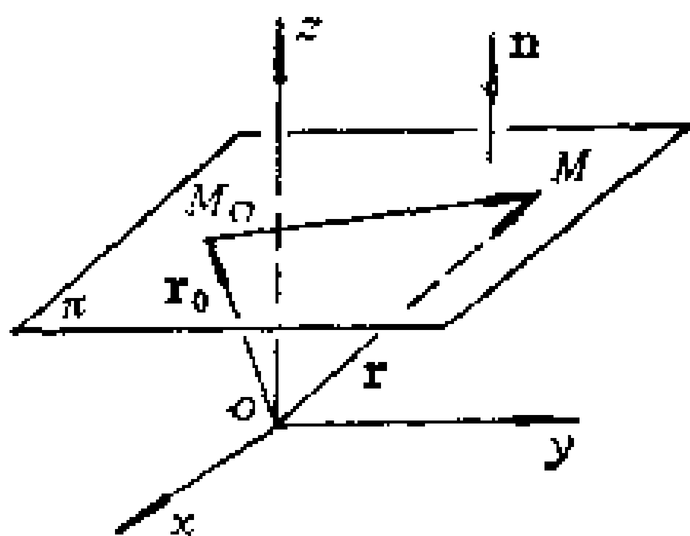


图 62

$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{r_0})=0$$

或
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (*)$$

当点M_0是确定的，而法向量$\vec{n}$或它的坐标A, B, C可任意取时，则方程(*)表示过M_0点的一个平面集合，也就是一个面把。所以，方程(*)就是以点M_0为中心的面把方程。

例1　一个平面通过点（1，1，−1），并通过两个平面$x+y-z=0$和$x-y+z-1=0$的交线，求这个平面方程。

解　通过交线的任意一个平面的方程为

$$x+y-2+\lambda(x-y+z-1)=0 \qquad (*)$$

因所求平面通过点（1，1，1），把它代入上式，则得

$$3+\lambda(-2)=0，从面 \lambda=\frac{3}{2}$$

把λ的值代入(*)中，则得

$$x+y-z+\frac{3}{2}(x-y+z-1)=0$$

或

$$5x-y+z-3=0$$

例2　求过点（6，2，−2）且与平面$x+3y-3z+1=0$平行的平面方程。

解　因为所求平面过点（6，2，−2），所以它的方程可写成面把方程的形式

$$A(x-6)+B(y-2)+C(z+2)=0$$

由平行条件可知

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-3}$$

由此，可取 $A=1$，$B=3$，$C=-3$。

故所求平面方程为

$$(x-6)+3(y-2)-3(z+2)=0$$

或 $$x+3y-3z-12=0$$

例 3 试求通过平面 $x+5y-z=0$和 $x-z+4=0$ 的交线且与平面 $x-4y-8z+12=0$组成$\pi/4$角的平面方程。

解 过两个平面交线的平面属于面束

$$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$$

或 $$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

我们须求 λ，使该平面与已知平面组成 $\pi/4$角。因为两个平面的法向量为$\vec{n}_1=\{1,\ -4,\ -8\}$，$\vec{n}_2=\{1+\lambda,\ 5,\ 1-\lambda\}$，而且 $|\vec{n}_1|=9$，$|\vec{n}_2|=\sqrt{2\lambda^2+27}$，$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=9(\lambda-3)$，所以

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

因而

$$\frac{9(\lambda-3)}{9\sqrt{2\lambda^2+27}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$，因此，所求平面方程为

$$x+20y+7z-12=0$$

§8 直线的标准方程

凡在已知直线上或与它平行的每个非零向量，都叫做已知**直线的方向向量**。这种向量所以叫做方向向量，是因为它们中的任意一个向量都能确定直线的方向。

我们常用$\vec{a}$表示直线的方向向量，l，m，n表示它的坐标，

即

$$\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}.$$

现在，我们来导出，过已知点$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$具有已知方向向量$\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}$的直线方程。

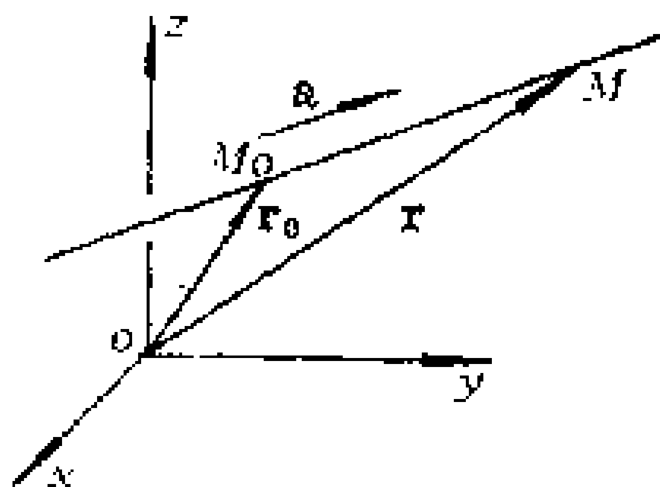


图 63

设 $M(x,\ y,\ z)$是已知直线上任意一点，显然向量$\overrightarrow{M_0M}$与$\vec{a}$共线（图63）。若用$\vec{r_0}$，$\vec{r}$分别表示点M_0，M的径向量，则有

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}$$

因而 $$\vec{a}\times(\vec{r}-\vec{r_0})=\vec{0} \tag{1}$$

因为 $$\vec{r}-\vec{r_0}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$$

所以，等式（1）可用坐标形式表示为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{2}$$

这就是所求的直线的标准方程。而（1）为已知直线的向量方程。

在方程（2）中，方向向量$\vec{a}$的坐标 l，m，n，可用$\vec{a}$的单位向量的坐标 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 代替，即

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma} \tag{3}$$

也就是直线的方向向量可用它的单位向量来代替。

必须指出，在方程（2）中，l，m，n 不能同时等于零；但其中有的可等于零。这时，必须令它所对应的分子等于零。例如，在方程（2）中，若n等于零，则（2）可写为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{0} \tag{4}$$

或

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\quad z=z_0 \tag{5}$$

方程（4）和（5）是等价的。

例1　求过一点（-1，0，4）且垂直于平面

$$3x-4y+z-10=0$$

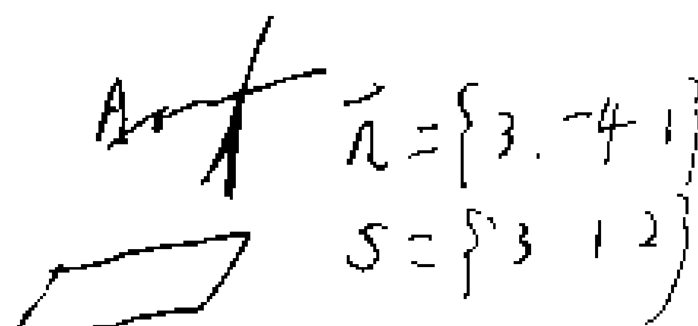
的直线的标准方程。

解　因所求直线过点（-1，0，4），如设方向向量为 $\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}$，则所求直线的标准方程可写为

$$\frac{x+1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z-4}{n}$$

因为所求直线的方向向量 $\vec{a}$ 与已知平面的法向量 $\vec{n}=\{3,-4,1\}$ 是共线的，所以，它们的坐标成比例，即

$$\frac{l}{3}=\frac{m}{-4}=\frac{n}{1}$$



可取 $l=3$，$m=-4$，$n=1$。

因此，所求直线的标准方程为

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-4}{1}$$

例2　试求通过点（-1，0，4）且平行平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程。

解　设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z-4}{n}$$

因所求直线与已知直线相交，所以它们共面，因面三个向量 $\{-1-(-1),\ 0-3,\ 4-0\}$，$\{3,\ 1,\ 2\}$，$\{l,m,n\}$，必共面，于是得

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 0-3 & 4-0 \\ 3 & 1 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

即

$$10l-12m-9n=0$$

又因所求直线与已知平面平行，所以有

$$3l-4m+n=0$$

解联立方程，则得

$$l:m:n=48:37:4$$

可取 $l=48$，$m=37$，$n=4$，因而得所求方程为

$$\frac{x+1}{48}=\frac{y}{37}=\frac{z-4}{4}$$

§9 直线的参数方程

我们已经知道，通过一个点而且平行于已知向量的直线是唯一确定的，并导出了它的标准方程。现在，我们想在同样条件下导出另外一种方程，所谓直线的参数方程。

设已知直线 p 通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，而且直线 p 的方向向量为 $\vec{a}=\{l, m, n\}$ （图64）。若 M 是直线 p 上任意一点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与向量 $\vec{a}$ 共线，也就是

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{a} \tag{1}$$

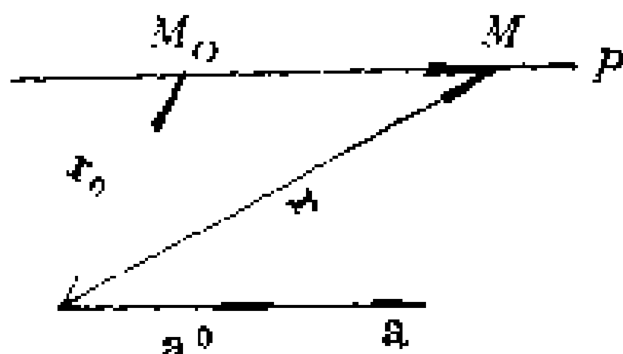


图 64

若点 M_0，M 的径向量分别为 $\vec{r_0}$，$\vec{r}$，则（1）式可写为

$$\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{a} \tag{2}$$

或

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a} \tag{2'}$$

把（2′）用坐标形式表示出来，则有

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+lt \\ y&=y_0+mt \\ z&=z_0+nt \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

我们把（3）式叫做直线的参数方程，（2′）叫做参数方程的向量形式，t 叫做参数。

在方程（3）中，t 可以看做是任意变化的参数，而 x, y, z 可以看做 t 的函数；当 t 变化时 x，y，z 也随之变化，这种

变化就是点M沿着已给的方向移动。

若方向向量是以单位向量$\vec{a}^\circ=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$给出的，则它在各坐标轴上的射影就是所求直线的方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$。在这种情形下，方程（2′）可化为形式

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}^\circ\rho$$

而方程（3）又可化为形式

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\rho\cos\alpha\\y&=y_0+\rho\cos\beta\\z&=z_0+\rho\cos\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

这时，参数ρ具有明显的几何意义：如果认定直线与向量$\vec{a}$是同向的，则ρ表示向量$\overrightarrow{M_0M}$在有向直线上的代数值，它的绝对值是动点M到定点M_0的距离。

参数方程很容易化为标准方程。如果我们从（3）中消去参数t，就得到标准方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

如果我们从（4）中消去ρ，就得到直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}$$

很明显，标准方程也容易变成参数方程。

直线的参数方程在空间解析几何中要比在平面解析几何中更常用到。特别是，当求直线与平面的交点时，很有用。

例1 已知直线通过点$P_0(-3,1,2)$并和向量$\vec{a}=\{1,2,-2\}$平行，求直线方程。

解 设$P(x,y,z)$是直线上的任意点，则因$\vec{a}\parallel\overrightarrow{P_0P}$，所以

$$\overrightarrow{P_0P}=\vec{a}\,t$$

若点P_0、P的径向量分别为$\vec{r}_0$、$\vec{r}$，则可写出参数方程的向

量形式

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{a}\,t$$

用坐标形式表示出来，就得到直线的参数方程

$$\left.\begin{aligned}x&=-3+t\\y&=1+2t\\z&=2-t\end{aligned}\right\}$$

直线的标准方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

例2 已知质点 M以 $M_0(1,\ 1,\ 1)$ 为起点，以21米/秒的速度，在向量 $\vec{R}=\{2,\ 3,\ 6\}$ 的方向上作直线运动，试求质点M的运动方程。

解 设质点M的运动速度为 $\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}$，则质点M的运动方程可写做

$$\left.\begin{aligned}x&=1+lt\\y&=1+mt\\z&=1+nt\end{aligned}\right\}$$

但因 $\vec{a}$ 与 $\vec{R}$ 的方向相同，而 $|\vec{a}|=21$，$|\vec{R}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$，所以 $\vec{a}=\{6,\ 9,\ 18\}$。因此，点M的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=1+6t\\y&=1+9t\\z&=1+18t\end{aligned}\right\}$$

§10 直线的两点式方程

我们知道，两个不同的点$M_1(x_1,\ y_1,z_1)$和$M_2(x_2,\ y_2,z_2)$能够确定唯一一条直线 p（图65）。我们来导出这条直线的方程。很明显，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 可

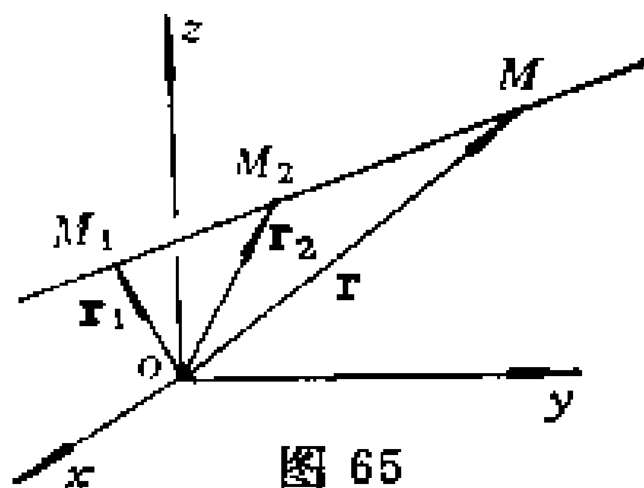


图 65

作为直线的方向向量。

如果在直线 p 上任取一点 M (x, y, z)，它的径向量用 $\vec{r}$ 表示，点 M_1、M_2 的径向量分别用 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$ 表示，则有

$$\vec{r}-\vec{r_1}=\lambda(\vec{r_2}-\vec{r_1}) \qquad (1)$$

或

$$(\vec{r}-\vec{r_1})\times(\vec{r_2}-\vec{r_1})=\vec{0} \qquad (2)$$

把（1）或（2）化为坐标形式，均得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

这就是所求的直线方程，我们把这种形式的方程叫做**直线的两点式方程**。方程（1）和（2）是两点式方程的向量形式。

利用两点式方程，容易得到三个点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$ 在同一条直线上的必要充分条件是

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

直线的两点式方程（3），实际上也可以看做直线的标准方程，这时 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 是方向向量。

例1　求通过两点 $M_1(1, 3, -2)$ 和 $M_2(2, -1, 0)$ 的直线方程。

解　设 M 是所求直线上任意一点，它的坐标为 x, y, z，则两点式方程为

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{-1-3}=\frac{z+2}{0-2}$$

或

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{-2}$$

例2　试证四点 $P_1(1, 0, 2)$，$P_2(2, 3, 1)$，$P_3(3, 6, 0)$ 和 $P_4(0, -3, 3)$ 在同一条直线上。

解　因为

$$\frac{3-1}{2-1}=\frac{6-0}{3-0}=\frac{0-2}{1-2}=2$$

所以，P_1，P_2，P_3 三点在同一直线上。
又因

$$\frac{0-1}{2-1}=\frac{-3-0}{3-0}=\frac{3-2}{1-2}=-1$$

所以，P_1，P_2，P_4 三点共线。
不难看出，点 P_3，P_4 在 P_1，P_2 两点确定的直线上，也就是四点共线。

§11 直线的一般方程

我们知道，空间的每条直线都可以看做是通过该直线的任意两个平面的交线．因而，空间直线可用两个一次方程来确定。

设已知空间的任意一条直线 p。用 π_1，π_2 表示交于直线 p 的两个平面（图66）。

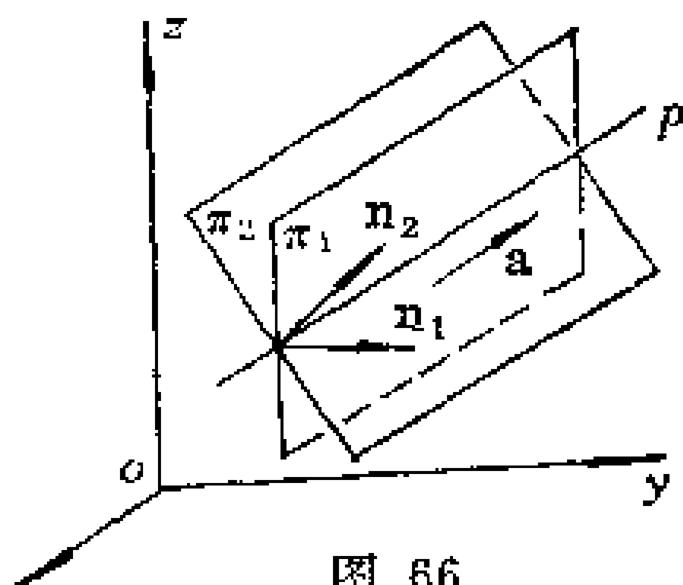


图 66

如果已知这两个平面的一般方程为

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (1)$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (2)$$

则这两个平面的交线 p 上任意点的坐标必满足这两个方程；反之，坐标满足这两个方程的点必在平面 π_1，π_2 上，因而也在直线 p 上。因此，方程（1）和（2）构成的方程组可看做直线的方程。

需要注意，因为平面 π_1 和 π_2 是相交的，所以两个平面 π_1 和 π_2 的法向量 $\vec{\pi}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$ 和 $\vec{\pi}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$ 不共线。反之，如果两个平面的法向量 $\vec{\pi}_1$ 和 $\vec{\pi}_2$ 不共线时，它们才能确定一条直线。

由此可知，方程（1）和（2），在它们的系数 A_1，B_1，C_1 和 A_2，B_2，C_2 不成比例的条件下，才能确定一条直线。

用方程（1）和（2）联立表示的直线方程，叫做**直线的一般方程**。因此，直线的一般方程的向量形式可写为

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_1\vec{r}+D_1=0\\ \vec{n}_2\vec{r}+D_2=0\end{array}\right\}$$

这里，两个平面的法向量$\vec{n}_1$和$\vec{n}_2$不共线。

若已知直线的一般方程

$$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1z-D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}\right\}$$

则可用如下方法化为标准方程。

首先求出直线上的任一点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，再求出方向向量$\vec{a}=\{l,\ m,\ n\}$。就可写出直线的标准方程。因为，已知直线是两个平面的交线，所以方向向量$\vec{a}$垂直于两个平面的法向量$\vec{n}_1$和$\vec{n}_2$，因面可取向量积$\vec{n}_1\times\vec{n}_2$作为方向向量$\vec{a}$。由于向量$\vec{n}_1$和$\vec{n}_2$的坐标是已知的，$\vec{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$，$\vec{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$，所以向量$\vec{a}$的坐标可由向量积$\vec{n}_1\times\vec{n}_2$求得。

反之，标准方程也可化为一般方程。例如，若标准为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

则可把它写成

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{m}\\[2ex] \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}\end{array}\right\}$$

或

$$\left.\begin{array}{l}n(x-x_0)=l(z-z_0)\\ n(y-y_0)=m(z-z_0)\end{array}\right\}$$

这就是直线的一般方程。经过整理，也可写做

$$\left.\begin{array}{l}x=az-p\\ y=bz+q\end{array}\right\}\qquad(3)$$

不难看出，这种形式的方程是把已知直线表示为平行于坐

标轴的两个平面的交线；或者看做是垂直于坐标面的两个平面的交线．过已知直线垂直于坐标面的平面，我们把它叫做已知直线对坐标面的投射平面．因此，空间任意一条直线的一般方程总可用通过该直线的两个投射平面的方程来表示．这样的方程（如式（3）），也叫做直线的投射式（射影式）方程．式（3）中的 p，q 具有简单的几何意义，它们是已知直线与 Oxy 坐标面交点的坐标；即交点为 $(p, q, 0)$．

例 1 试把直线的一般方程

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+y-2z-4=0 \end{aligned}\right\}$$

化为标准方程．

解 我们先求出直线上的一个点．任意选定一个坐标，例如 $z=1$．于是，已知方程变为

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y=4 \\ 3x+y=6 \end{aligned}\right\}$$

解此方程，得 $x=2$，$y=0$．这样，就得到直线的一点（2，0，1）．

再作法向量 $\vec{n}_1=\{2, -3, 1\}$ 和 $\vec{n}_2=\{3, 1, -2\}$ 的向量积，则得到直线的方向向量 $\vec{a}=\{5, 7, 11\}$．所以，标准方程为

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z+1}{11}$$

例 2 试把直线的标准方程

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$$

化为它的投射方程．

解 把已知的方程改写为与它等价的方程．

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-1}{2}=\frac{z}{-1} \\ \frac{y}{3}=\frac{z}{-1} \end{aligned}\right\}$$

或 $$\left.\begin{array}{r}x+2z-1=0\\ y+3z=0\end{array}\right\}$$

也可写做

$$\left.\begin{array}{l}x=-2z+1\\ y=-3z\end{array}\right\}$$

这就是所求的方程。

例 3 试求过直线

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y+5z+6=0\\ x+4y+3z+4=0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

且平行于直线

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3} \qquad (2)$$

的平面方程。

解 我们先作出过直线（1）的平面束方程

$$3x+2y+5z+6+\lambda(x+4y+3z+4)=0 \qquad (3)$$

在这个平面束中，确定平行于直线（2）的平面，实际上就是确定合乎条件的 λ 值。为此，把方程（3）变形为

$$(3+\lambda)x+(2+4\lambda)y+(5+3\lambda)z+(6+4\lambda)=0$$

由此可知，所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{3+\lambda, 2+4\lambda, 5+3\lambda\}$，而直线（2）的方向向量为 $\vec{a}=\{3, 2, -3\}$。因为所求平面与直线（2）平行，所以向量 $\vec{n}$ 必与向量 $\vec{a}$ 垂直，因而它们的数量积等于零，即

$$3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0$$

解出 $\lambda=1$。把 λ 的值代入方程（3），便得所求的平面方程为

$$4x+6y+8z+10=0$$

或 $$2x+3y+4z+5=0$$

§12 两条直线间的角

已知空间的两条直线，它们的方向向量之间的夹角叫做两

条直线间的角。

若已知两条直线的标准方程为

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

则可求得这两条直线间的角 φ。因为已知两条直线的方向向量分别为

$$\vec{a_1}=\{l_1, m_1, n_1\},\quad \vec{a_2}=\{l_2, m_2, n_2\},$$

根据向量的夹角公式，则得

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1n_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

如果要取锐角，只要取 $\cos\varphi$的绝对值所确定的角φ即可。

如果两条直线垂直或平行，则它们的方向向量垂直或共线；反之，也成立。因此，两条直线垂直或平行的必要充分条件分别是

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

或
$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

例1　求两条直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$$

和

$$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

间的角。

解　因为，第一条直线的方向向量为$\vec{a_1}=\{1,\ -4,\ 1\}$，而第二条直线的方向向量为$\vec{a_2}=\{2,\ -2,\ -1\}$，所以

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由此

$$\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

例 2 试证下列两条直线

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

和

$$\frac{x+5}{6}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-2}$$

重合.

证 因为

$$\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2},$$

所以，两条直线的方向向量共线，也就是两条直线平行. 又因，第一条直线上的点(1, 5, -1)的坐标满足第二条直线的方程：

$$\frac{1+5}{6}=\frac{5-1}{4}=\frac{-1-1}{-2},$$

所以点(1, 5, -1)也在第二条直线上，因而两条直线重合.

§13 点到直线的距离

设已知一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和一直线p，它的标准方程为

$$p:\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

我们来求点M_1到直线p的距离.

从已知点向已知直线作垂线，设垂足为H，M_1H的长度d就是点M_1到直线p的距离（图67）. 容易看出，我们所要求的距离d就是以向量$\overrightarrow{a}=\{l, m, n\}$和$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$为边所

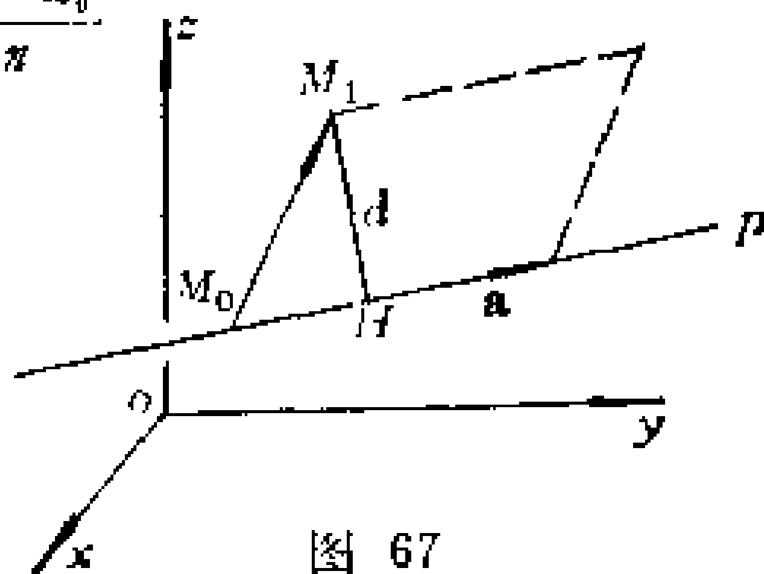


图 67

构成的平行四边形的高。

设

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}$$

因为$|\vec{r}|$等于平行四边形的面积，所以

$$d = \frac{|\vec{r}|}{|\vec{a}|}.$$

而 $\vec{r} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} \right\}$,

$$|\vec{r}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

因此

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

这就是计算点到直线距离的公式。

这个公式也可利用线段$\overline{M_0M_1}$在直线 M_1H 上的射影得到。

例 1　求点 $M_1(2,\ 1,\ 1)$到直线

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

的距离。

解　利用点到直线的距离公式，则有

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以，点 M_1 到直线的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例2　试求从点 $P(1, 1, 1)$ 到直线

$$\frac{x-11}{2}=\frac{y-18}{5}=\frac{z-4}{-2}$$

的距离。

解　过点 P 作平面 π 垂直于已知直线，并求它们的交点 Q。显然，点 P 到点 Q 的距离等于点 P 到已知直线的距离。

过点 P 的平面 π 的方程可写为

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$$

的形式。

因为，此平面垂直于已知直线，所以此平面的法向量 $\vec{n}=\{A, B, C\}$ 必与已知直线的方向向量 $\vec{a}=\{2, 5, -2\}$ 共线，也就是

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{5}=\frac{C}{-2}$$

因而，可取

$$A=2, \quad B=5, \quad C=-2$$

所以，平面 π 的方程为

$$2x+5y-2z-5=0$$

再解已知直线与平面 π 的联立方程组，求出交点 Q，它的坐标为 $(5,3,10)$。因此，点 P 到直线的距离为

$$d=|\overline{PQ}|=\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2+(10-1)^2}=\sqrt{101}$$

§14　两条直线的公垂线方程

设已知两条直线 p 和 q，它们的标准方程为

$$p:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$q:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

假定，这两条直线的方向向量 $\vec{a}_1=\{l_1, \ m_1, \ n_1\}$ 和 $\vec{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ 不共线；也就是，直线p 和 q，或者是异面的，或者是相交的。

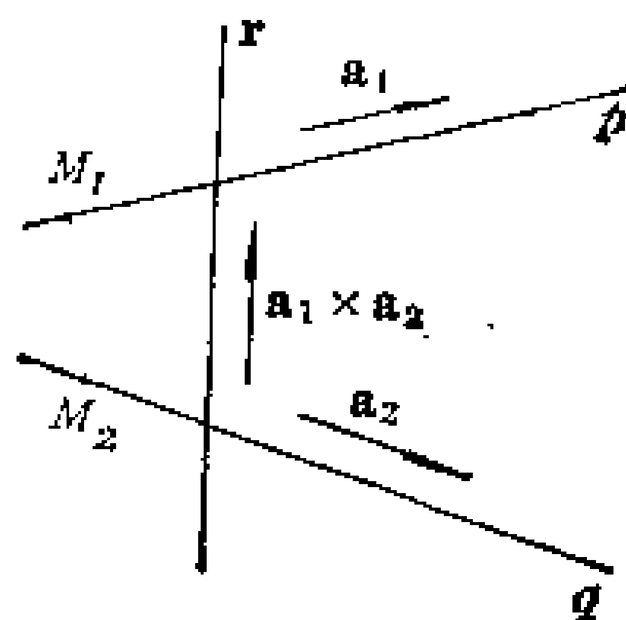


图 68

设直线 r 是与已知直线 p 和 q相交的公垂线（图68）。我们可以把已知直线的方向向量的向量积$\vec{a}_1\times\vec{a}_2$作为直线 r 的方向向量，它的坐标为

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}$$

公垂线 r可以看做 π_1 和 π_2 两个平面的交线，其中 π_1 是由直线 p和r确定的平面，π_2 是由直线 q和 r 确定的平面。现在，我们导出 π_1 和 π_2 两个平面的方程。

因为，平面π_1通过直线 p 上的点 $M_1(x_1, \ y_1, \ z_1)$，并且与向量$\vec{a}_1$和 $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$平行，所以平面 π_1 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0$$

同理，平面 π_2 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

因此，把平面 π_1 和 π_2 的方程联立起来，就是已知直线 p和q 的公垂线 r 的方程。

例　求直线

$$p: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$$

和

$$q: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$$

的公垂线方程。

解 因为直线 p和 q的方向向量分别为$\vec{a_1}=\{2, 1, 0\}$ 和$\vec{a_2}=\{1, 0, 1\}$，所以公垂线的方向向量为 $\vec{a}=\vec{a_1}\times\vec{a_2}=\{1, -2, -1\}$。

作平面π_1通过直线 p 并且平行于向量$\vec{a}$，则π_1 的方程为

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

或 $\qquad \pi_1:\ x-2y+5z-8=0$

同理，可得 π_2 的方程为

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

或 $\qquad \pi_2:\ x+y-z-1=0$

因此，已知直线 p和 q的公垂线方程为

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+5z-8=0 \\ x+y-z-1=0 \end{array}\right\}$$

§15 两条异面直线间的距离

端点分别在两条异面直线上的公垂线段叫做**两条异面直线间的距离**，也是最短距离。

设已知两条异面直线 p和 q，它们的标准方程为

$$p: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$q:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

从这两个方程中可以看出，这两条直线的方向向量分别为 $\vec{a_1}=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$，$\vec{a_2}=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$；这两条直线上的已知点分别为 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$。

我们把向量 $\vec{a_1}$ 和 $\vec{a_2}$ 的始点附着于点 M_1，并且用向量 $\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 为棱作一个平行六面体（图69）。从图69可以看出，两条已知直线间的最短距离等于平行六面体含有直线 p 和 q 的两个界面间的距离，它可作为平行六面体的高来计算。因而

$$d=h=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a_1}\,\vec{a_2}|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}$$

用坐标表示，则得

$$d=\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}n_1 & l_1\\ n_2 & l_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2}}\text{的绝对值}$$

这就是计算两条异面直线间的距离公式。

这个公式也可利用向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在直线 p 和 q 的公垂线 r 上的射影求得（图70）。

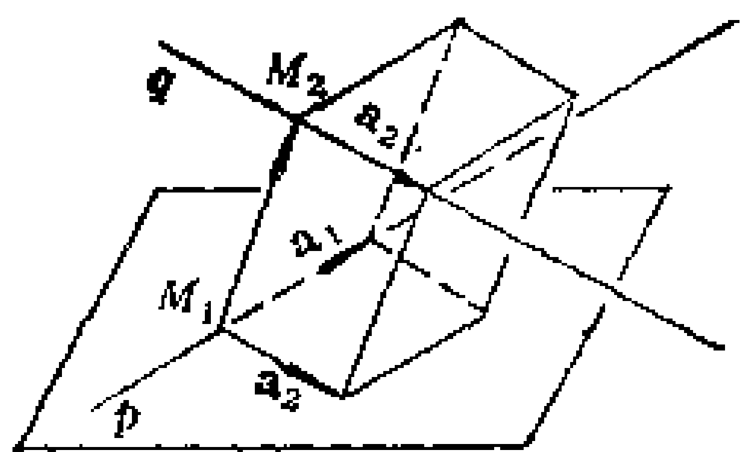


图 69

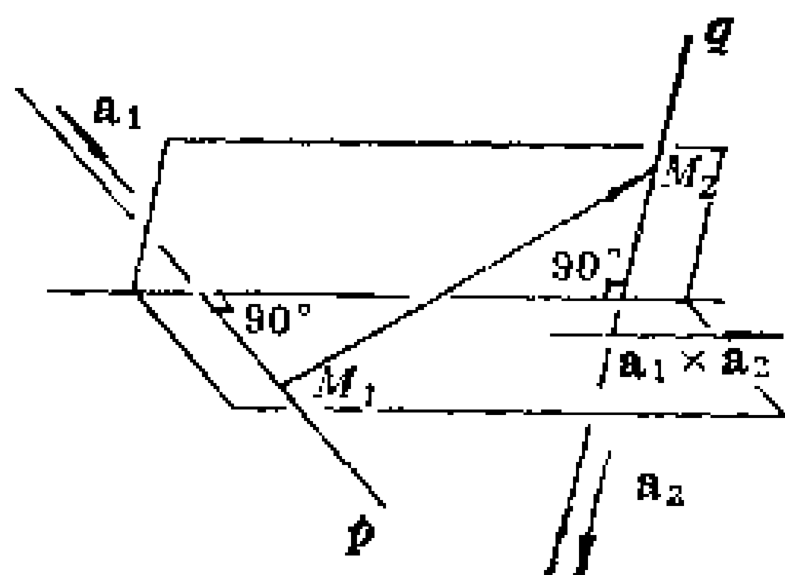


图 70

例 求两条直线

$$p:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$$

和

$$q: \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$$

间的距离。

解 已知直线 p上的点为 $M_1(3,0,1)$，方向向量为 $\vec{a}_1=\{2,1,0\}$，直线 q 上的点为 $M_2(-1,2,0)$，方向向量为 $\vec{a}_2=\{1,0,1\}$。因为

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

所以直线 p和 q不共面。根据异面直线距离公式，则得

$$d=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2}} \text{的绝对值。}$$

$$d=\left|-\frac{7}{\sqrt{6}}\right|=\frac{7}{6}\sqrt{6}$$

所以，两条直线 p 和 q 之间的距离为$\frac{7}{6}\sqrt{6}$。

§16 直线与平面间的角

设已知平面 π

$$Ax+By+Cz+D=0$$

和直线 p

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

我们来求它们之间的角。

直线与它在平面上的射影之间的锐角叫做直线与平面间的

角（图71）．为了求得这个角，我们来考查一下，它与平面的法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 和直线的方向向量 $\vec{a}=\{l,m,n\}$ 之间角的关系．设直线与平面的角为 θ，直线的方向向量与平面的法向量之间的角为 φ．从图71中可以看出，θ 和 φ 之间有如下关系：

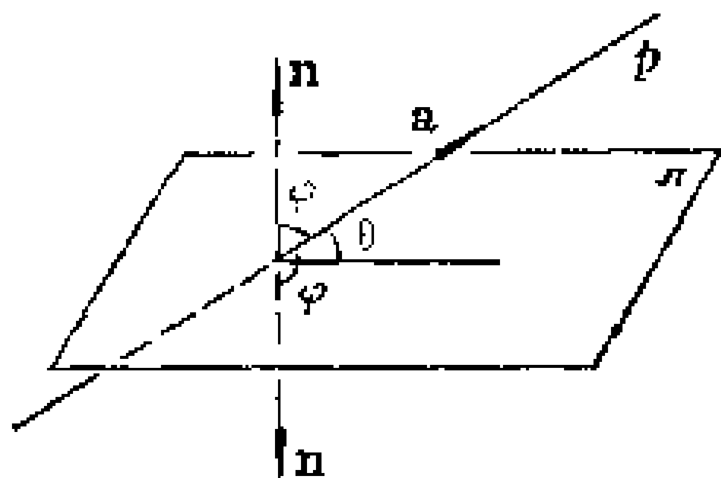


图 71

$$\theta=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

因此

$$\sin\theta=\pm\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\pm\cos\varphi$$

为了取 θ 为非负的锐角，则

$$\sin\theta=|\cos\varphi|.$$

根据向量夹角的余弦公式，则得

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

如果直线 p 与平面 π 平行，则向量 $\vec{n}$ 和 $\vec{a}$ 垂直，因而 $\vec{n}\,\vec{a}=0$，或

$$Al+Bm+Cn=0 \qquad (*)$$

反之，如果具备条件（*），则直线平行于已知平面．

如果直线 p 垂直于平面 π，则向量 $\vec{n}$ 和 $\vec{a}$ 共线，因而

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (**)$$

条件（**）也是直线与平面垂直的充分条件．

例1　求直线

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$$

与平面

$$2x - y + z - 6 = 0$$

之间的角。

解 因为直线的方向向量为 $\vec{a} = \{1, 1, 2\}$，平面的法向量为 $\vec{n} = \{2, -1, 1\}$，因而

$$\sin\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}||\vec{a}|} = \frac{|2\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

所以，直线与平面间的角 $\theta = \frac{\pi}{6}$.

例 2　求通过点 $M(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程。

解 设通过点 $M(1, -2, 4)$ 的直线方程为

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-4}{n}$$

因为，该直线与已知平面垂直，必与平面的法向量共线，所以

$$\frac{l}{2} = \frac{m}{-3} = \frac{n}{1}$$

可取 $l = 2$, $m = -3$, $n = 1$，代入上式，即得所求直线方程

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

§17　直线与平面的交点

若已知直线的方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

平面的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

我们来求直线与平面的交点。

因为直线与平面的交点坐标必同时满足直线和平面的方

程，所以我们把方程（1）的 x，y，z 值代入方程（2），则得

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+t(Al+Bm+Cn)=0 \quad (3)$$

（3）式可能出现三种情况：

1° $Al+Bm+Cn\neq 0$，即直线与平面不平行．这时，

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$$

把求得的 t 值代入方程（1），就得到直线与平面的唯一交点。

2° $Al+Bm+Cn=0$，但 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$．在这种情况下，方程（3）没有解．也就是，直线（1）和平面（2）没有交点，直线平行于平面．反之，如果直线（1）平行于平面（2），也就是直线与平面没有交点，则

$$Al+Bm+Cn=0，而Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.$$

3° $Al+Bm+Cn=0$ 和 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$。在这种情况下，t 的任意值都是方程（3）的解，因面直线（1）的任意点都在平面（2）上，也就是直线在平而上．反之，如果直线（1）在平面（2）上，则 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$和 $Al+Bm+Cn=0$，这是因为直线（1）的所有点都在平面（2）上，而且向量$\vec{n}=\{A, B, C\}$和$\vec{a}=\{l, m, n\}$ 互相垂直。

例1 求直线

$$p: \frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

与平面

$$\pi: 2x+3y+3z-8=0$$

的交点。

解 把直线 p的方程化为参数方程

$$x=-2+3t, \ y=2-t, \ z=-1+2t \qquad (*)$$

把(*)中的 x，y，z 值代入平面方程，得

$$2(-2+3t)+3(2-t)+3(-1+2t)-8=0$$

解之，得 $t=1$，把 $t=1$ 代入(*)中，得 $x=1$，$y=1$，$z=1$。所以，直线 p 与平面 π 的交点为(1,1,1)。

例2 试说明直线 p

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-4}$$

与平面 π

$$2x+5y+4z-11=0$$

的位置关系。

解 因为

$$Al+Bm+Cn=2\times3+5\times2+4\times(-4)=0$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=2\times2+5(-1)+4\times3-11=0$$

所以，直线 p 在平面 π 上。

例3 求点 $P(3,2,17)$ 在平面 $3x+4y+12z-52=0$ 上的垂足。

解 设垂足为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，于是，$\overrightarrow{P_0P}$ 垂直于已知平面，而已知平面的法向量为 $\vec{n}=\{3, 4, 12\}$ 因此，向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{n}$ 共线，即

$$x_0-3=3t,\quad y_0-2=4t,\quad z_0-17=12t$$

或 $$x_0=3+3t,\quad y_0=2+4t,\quad z_0=17+12t \qquad (*)$$

因为点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在已知平面上，所以

$$3(3+3t)+4(2+4t)+12(17+12t)-52=0$$

解之，得 $t=-1$。代入(*)中，得 $x_0=0$，$y_0=-2$，$z_0=5$。所以，点 P 在已知平面上的垂足为(0,-2,5)。

§18 两条直线共面的条件

设已知两条直线的方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1+l_1t\\y&=y_1+m_1t\\z&=z_1+n_1t\end{aligned}\right\}\ (1)\quad 和\quad \left.\begin{aligned}x&=x_2+l_2t\\y&=y_2+m_2t\\z&=z_2+n_2t\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

如果这两条直线在同一平面上(图72)，则它们的方向向量$\vec{a_1}=\{l_1, m_1, n_1\}$，$\vec{a_2}=\{l_2, m_2, n_2\}$以及向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$共面；因而它们的混合积等于零，也就是

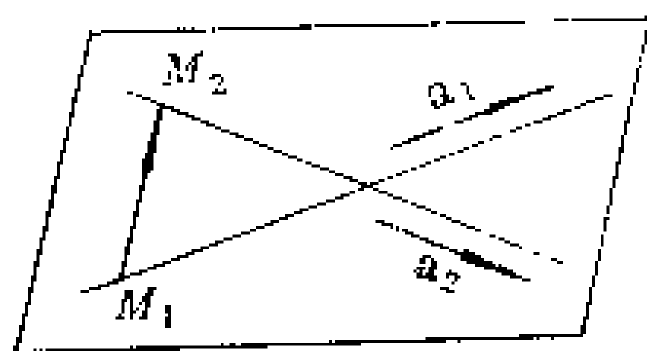


图 72

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

反之，如果条件（3）成立，则向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$共面。在这种条件下，过点M_1，M_2具有方向向量$\vec{a_1}$和$\vec{a_2}$的两条直线（1）和（2）全部位于过两点M_1，M_2且平行于向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$的平面内。

这样，条件（3）不仅是两条直线在同一平面上的必要条件而且还是充分条件。因而，如果不具备（3）的条件，则直线（1）和（2）不在同一平面内，也就是，它们是异面直线。

容易证明，两条直线（1）和（2）相交的必要充分条件是：条件（3）成立而且两条直线的方向向量$\vec{a_1}$和$\vec{a_2}$不共线。

例1 求两条直线p_1和p_2的交点

$$p_1: \ \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-1}{3}$$

$$p_2: \ \frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-6}{2}$$

解 验证p_1和p_2是否相交：

已知p_1的方向向量为$\vec{a_1}=\{2, -5, 3\}$，p_2的方向向量为$\vec{a_2}=\{-4, 1, 2\}$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-3, -2-2, 6-1\}=\{-2, -4, 5\}$，因为

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 2 & -5 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

所以，直线 p_1 和 p_2 共面。又因$\frac{2}{-4} \neq \frac{-5}{1} \neq \frac{3}{2}$不成比例，即$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$不共线，所以 p_1 和 p_2 相交。

求 p_1 和 p_2 的交点：

把 p_1 和 p_2 的方程写成参数形式

p_1: $x=3+2t$, $y=2-5t$, $z=1+3t$,

p_2: $x=1-4t'$, $y=-2+t'$, $z=6+2t'$.

设 p_1 和 p_2 的交点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则 x_0, y_0, z_0 必同时满足 p_1, p_2 的方程。所以

$$3+2t=1-4t' \qquad (1)$$

$$2-5t=-2+t' \qquad (2)$$

$$1+3t=6+2t' \qquad (3)$$

为解出 t，把(1)+4×(2)消去 t'，得 $11-18t=-7$，所以，$t=1$。代入 p_1 的方程，得 $x_0=5$，$y_0=-3$，$z_0=4$。因此，p_1 和 p_2 的交点为 $M_0(5, -3, 4)$。

例2 一直线通过点(1,1,1)且和两条直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \text{和} \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

相交，求直线方程。

解 通过点(1,1,1)的所求方程设为

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}$$

这条直线与第一条已知直线在同一平面上的条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

展开，得 $\quad l-2m+n=0 \qquad (1)$

所求直线与第二条已知直线在同一平面上的条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ l & m & n \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

展开，得 $\quad l+2m-n=0 \qquad (2)$

从（1）和（2），得到 $l:m:n=0:1:2$

因此，得到通过点（1，1，1）且和第一条直线共面，而且也和第二条直线共面的直线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

不难证明，这条直线与两条已知直线都相交。

实际上，这条直线的方向向量 $\vec{a}=\{0,\ 1,\ 2\}$ 和两条已知直线的方向向量 $\vec{a_1}=\{1,\ 2,\ 3\}$，$\vec{a_2}=\{2,\ 1,\ 4\}$。都不共线。

习　　题

1．检验平面 $3x-5y+2z-17=0$ 是否通过下列各点：$A(4,\ 1,2)$，$B(2,\ -1,\ 3)$，$C(7,\ 1,\ 2)$，$D(3,\ 0,\ 4)$，$E(0,\ -4,\ 2)$。

2．指出下列平面的特点：

（1）$x+y=0$；　　（2）$3x+2z+8=0$；

（3）$5(x-1)=0$；　　（4）$x+y+2z=0$。

3．试求下列平面方程的法向量坐标：

（1）$x-2y+z-12=0$；　　（2）$3x+8y-12=0$；

（3）$5x=y+z$；　　（4）$x+2=0$。

4．试求过点（3，0，－5）且平行于平面 $2x-8y+z-2=0$ 的平面方程。

5．试求通过 Ox 轴且垂直于平面 $5x+y-2z+3=0$ 的平面方程。

6．试求经过点 $A(1,\ 2,\ -1)$ 和 $B(-5,\ 2,\ 7)$ 且平行于向量 $\vec{a}=\{0,\ 1,\ 2\}$ 的平面方程。

7．试求经过三点 $A(2,\ -1,\ 1)$，$B(2,\ 1,\ 3)$，$C(1,\ 1,\ -1)$ 的平面方程。

8．试求经过点 $P(2,-1,3)$且与各坐标轴截距相等的平面方程。

9．试证：平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三个坐标面所截得的三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

10．一平面垂直于已知平面 $2x-2y+4z-5=0$，且在 Ox轴和 Oy轴上的截距为 $a=-2$，$b=\frac{2}{3}$，试求此平面方程。

11．一平面与各坐标轴截距之和为4，且与平面 $2x+3y+2z+2=0$ 平行．试求此平面方程。

12．一平面平行于已知平面$2x+y+2z+5=0$，且与三坐标面构成的四面体体积等于1．试求此平面方程。

13．判断下列方程中，哪些是法线式方程。

（1）$x-2y+5z-3=0$；　　（2）$\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}y+\frac{7}{9}z-2=0$；

（3）$\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}y+\frac{7}{9}z+1=0$；（4）$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=0$；

（5）$x-2=0$；　　（6）$x-y=0$。

14．已知坐标原点O到平面π 的垂足坐标为 $P(3,4,-5)$，试求此平面方程。

15．设一平面在有公共坐标原点和相同测度单位的两个不同坐标系$Oxyz$与$Ox'y'z'$中的截距为 a，b，c 和 a'，b'，c'，试证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$．

16．试计算下列各题中的点到平面 π 的离差 δ 与距离 d。

（1）$M(-2,-4,3)$，　π：$2x-y+2z+3=0$。

（2）$M(2,-1,-1)$，　π：$16x-12y+15z-4=0$。

（3）$M(1,2,-3)$，　π：$5x-3y+z+4=0$。

（4）$M(0,0,0)$，　π：$4x-3y-1=0$。

17．试在 Oz 轴上求一点 P，使得它到点 $M(1,-2,0)$的距离等于到平面 $3x-2y+6z-9=0$ 的距离。

18．试求二平行平面 $2x-3y+6z-8=0$和 $2x-3y+6z+4=0$ 的等距面方程。

19. 试求二平面 $x-3y+2z-5=0$, $3x-2y-z+3=0$ 的角平分面方程。

20. 试判定点 $M(-3, -2, 1)$在两个平面 π_1: $5x-y+z+3=0$与 π_2: $4x-3y+2z+5=0$ 所构成的锐角内，还是在钝角内。

21. 试在 Oy 轴上求与二平面 π_1: $2x+3y+6z-6=0$ 和 π_2: $x-2y+2z+9=0$ 等距的点 P。

22. 试求与坐标原点的距离为6，且在三个坐标轴上的截距为$a:b:c=1:3:2$ 的平面方程。

23. 已知平面通过 Ox 轴，且点$M(5, 4, 3)$到它的距离 $d=4$，试求此平面方程。

24. 试求与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，且到坐标原点的距离为1的平面方程。

25. 试求点 $M(1, 1, 1)$关于平面$x+2y-z-8=0$的对称点。

26. 试求满足下列条件的 l, m, n。

（1）二平面 $2x+ly+3z-5=0$ 与 $mx-6y-6z+2=0$ 平行；

（2）二平面 $7x-2y-z=0$ 与 $lx+y-3z-1=0$ 垂直；

（3）二平面 $4x-3y+5z-8=0$与$x+3y-nz-4=0$ 相交成$\frac{\pi}{3}$角。

27. 试求通过 Ox 轴，且与 Oxy 坐标面构成$\frac{\pi}{6}$角的平面方程。

28. 试求通过坐标原点，且垂直于二平面 $x+2y+3z-13=0$ 与 $3x+y-z-1=0$ 的平面方程。

29. 试求过点$A(0, -1, 0)$, $B(0, 0, 1)$，且与平面 $y-z-2=0$构成$\frac{2}{3}\pi$ 角的平面方程。

30. 试求下列各组平面的交点。

（1）$\left.\begin{aligned}5x+8y-z-7=0\\x+2y+3z-1=0\\2x-3y+2z-9=0\end{aligned}\right\}$，（2）$\left.\begin{aligned}x-4y-2z+3=0\\3x+y+z-5=0\\3x-12y-6z+7=0\end{aligned}\right\}$，

（3）$\left.\begin{aligned}2x-y+5z-4=0\\5x+2y-13z+23=0\\3x-z+5=0\end{aligned}\right\}$。

31. 验证下列四平面共点：

π_1: $5x+2y-z-12=0$, π_2: $2x-7y+3z+22=0$,

π_3: $x-y+10z+12=0$.　π_4: $6x+3y-8z-23=0$.

32　试证：三个平面的法向量$\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$线性相关的必要充分条件是这三个平面或者没有交点，或者交点不是唯一的。

33．试求经过三个平面 $x-2y+8z+9=0$，$x-4z-13=0$ 和 $2x+y+5z+1=0$ 的交点，且垂直于向量$\vec{a}=\{1,\ 3,\ 1\}$的平面方程。

34．已知一平面通过点 $(2,\ -5,1)$ 和二平面 $x+6y-3z+3=0$ 及 $2x+7y-z+8=0$ 的交线．试求此平面方程。

35．试证三平面 π_1: $2x-y+1=0$，π_2: $x+2y+z+2=0$ 和 π_3: $3x+y+z+3=0$属于同一平面束．并求此面束中过点$P(1,\ 0,\ 1)$的平面方程。

36．试在平面束 $(x+3y-5)+k(x-y-2z+4)=0$中，求与Ox轴和Oy轴截距相等的平面方程。

37．试求属于平面束 $4x-y+2z+6+k(6x+5y+3z+9)=0$ 的坐标平面。

38．试在平面束 $x+y-z+1+k(x-2y+z)=0$ 中，求垂直于各坐标面的平面方程。

39．在面把 $x-y+z-1+\lambda(x+2y-3z+6)+\mu(2x-3y+z-1)=0$ 中，试求过点 $A(0,\ -1,\ 1)$和 $B(-1,\ 0,\ 2)$的平面方程。

40．在面把 $x-y+z-1+\lambda(x+y-z-2)+\mu(5x+y+z-7)=0$中，求平行于各坐标面的平面方程．并求其面把中心。

41．试求过点 $M(1,\ -1,\ -3)$，且平行于向量$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 4\}$的直线方程。

42．试求经过坐标原点，且到三个坐标面距离相等的直线方程。

43．试求平行于直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$，$y+1=0$，且通过点$(1,2,-1)$的直线方程。

44．试求通过点 $(1,2,0)$ 且平行于二平面 $3x-y+z=0$和 $x-z=0$ 的直线方程。

45．试求点$M(3,\ 1,\ -1)$在平面 $x+2y+3z-30=0$ 上的投影。

46．试在平面 $x+2y-5z-4=0$ 上，求与 Ox轴，Oy 轴相交的直线方程。

47．试求通过点 $A(3,\ -1,\ 2)$，$B(2,\ 1,\ 1)$ 的直线的参数方程。

48．已知直线方程：$x=2t$，$y=1$，$z=2t-1$，若点 $M(2,\ 1,\ c)$ 在

直线上，试求 c。

49. 试求通过点 $M(1,\ 2,\ -1)$，且垂直于二直线

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 5t \end{cases} \text{及} \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 4 \end{cases}$$ 的直线参数方程。

50. 将下列直线方程化为标准式

(1) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ 3x + y - 2z - 4 = 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ y - 2z + 8 = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ 3x - z + 12 = 0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - 3z + 3 = 0. \end{cases}$

51. 试求 D 为何值时，直线 $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ 与 Ox 轴，Oy 轴及 Oz 轴相交。

52. 试求直线 $\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \\ 6x - y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ 在三个坐标面上射影的方程。

53. 试求通过直线 $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ 和点 $M(1,\ 1, 2)$ 的平面方程。

54. 试求通过点 $M(-1,\ -2,\ 3)$，且与二直线 $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z-2}{2}$ 和 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ 平行的平面方程。

55. 试求通过直线 $\begin{cases} 2x + 5y - 5 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 且垂直于平面 $x + 4y + 3z + 1 = 0$ 的平面方程。

56. 一平面通过过点 $M(1,\ -1,\ 0)$ 与直线 $\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ 相交的垂线及坐标原点，试求此平面方程。

57. 试求二直线 $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 7x + 2 \end{cases}$ 的公垂线方程。

58. 一平面通过二直线 p：$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-5}{1}$ 和 q：$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ 的公垂线 r，并且平行于向量 $\vec{c} = \{1,\ 0,\ -1\}$，试求此平面方程。

59. 试求过点$M(1, 1, \sqrt{2})$，和 Oz 轴成$\frac{\pi}{3}$角，且与直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$相交的直线方程。

60. 通过坐标原点的一条直线与Ox轴和 Oz 轴构成等角，且与直线$\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ x+3y-z+3=0 \end{cases}$交成$\frac{\pi}{3}$角，试求此直线方程。

61. 试求点 $M(1, 1, -6)$关于直线 $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ 的对称点 M' 的坐标。

62. 试求点 $P(2, 3, -1)$ 到下列直线的距离。

（1）$x=1+t,\ y=2-t,\ z=13+4t$；

（2）$\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

63. 试在直线$\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$上，求与点 $P(3, 2, 6)$ 距离最小的点M_0。

64. 试在 Oz 轴上求一点P，使得点P到直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-2}$的距离为$\sqrt{2}$。

65. 试求下列二直线间的距离：

（1）p：$\frac{x-5}{1}=\frac{y}{-16}=\frac{z+4}{2}$，$q$：$\frac{x-27}{2}=\frac{y+25}{1}=\frac{z-1}{-2}$；

（2）p：$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$； q：$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-2y+3z+1=0. \end{cases}$

66. 试求二平行直线$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{3}$与$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$间的距离。

67. 一直线通过点 $M(2, 2, 2)$，且平行于平面 $2x+y-z+1=0$，以及它到 Ox 轴的距离等于2，试求此直线方程。

68. 试求通过直线 p：$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$且平行于直线 q：$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$的平面方程。

69．在平面 π：$x+y+z+1=0$ 上，求通过直线l：$\begin{cases} y+z+1=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$与平面 π的交点M，且垂直于直线 l 的直线方程。

70．试求直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$关于 Oxy坐标面的对称直线，并求此二对称直线的交点。

71．试求通过点$(-1,2,4)$，平行于平面 π：$3x-4y+z-10=0$，且和直线$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程。

72．试求通过二平行直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$与$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$的平面方程。

73．试求过点$(-3,5,9)$，且与二直线 $\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$和 $\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$ 相交的直线方程。

74．在平面 π：$x+y+z=0$ 上，求与二直线 l_1：$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$和 l_2：$\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$相交的直线方程。

75．试求二相交直线 l_1：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$与 l_2：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$的角平分线方程。

76．试求平行于直线p_1：$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$且与直线$p_2$：$\begin{cases} z=4x-6 \\ z=4y+3 \end{cases}$ 和 p_3：$\begin{cases} z=x-4 \\ z=3y+1 \end{cases}$ 相交的直线方程。

第四章　二 次 曲 面

二次曲面是空间解析几何的主要内容。它在生活和生产实践中，在数学物理和工程技术中都有广泛的应用。因此，我们研究它们的方程、形状和性质是非常必要的。在二次曲面的讨论中，常常涉及这样两个基本问题：1° 已知作为轨迹的曲面时，求出这个曲面的方程；2° 已知曲面的方程时，来研究这个方程所确定的曲面形状。

§1　曲 面 方 程

我们考虑形如

$$z=f(x,y) \qquad (1)$$

的方程。

如设 $x=x_1$，$y=y_1$，则可计算出 z 的值

$$z_1=f(x_1,y_1)$$

这时，数 x_1,y_1,z_1 是方程（1）的解。

能使 $z=f(x,y)$ 得到实数值的所有数对 x,y 的集合，我们叫做已知方程中变量 y 的存在域，并用 D 来表示它。

我们在直角坐标系中，来考查平面 Oxy 上 D 内的所有点 $N(x,y,0)$．在这样的每一点上引平面 Oxy 的垂线，并截取线段 $\overline{NM}$，使它等于由方程（1）计算出的对应值 z．所有点 $M(x,y,f(x,y))$ 的集合构成一个曲面（图73）．曲面上所有点的坐标满足方程（1），方程（1）就是曲面方程。

这样，我们就可给出如下定义：

坐标满足方程

$$F(x, y, z)=0 \qquad (2)$$

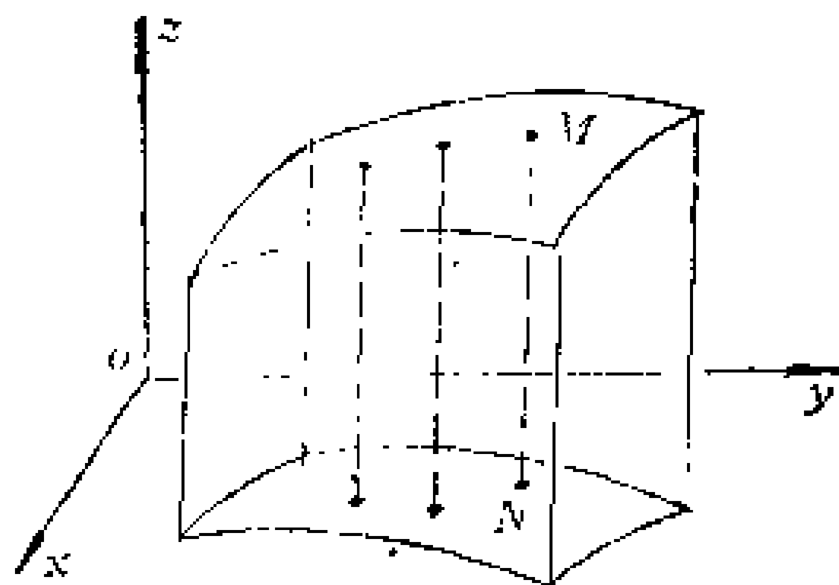


图 73

的空间所有点的集合叫做曲面. 方程（2）叫做曲面方程. 显然，方程（1）是方程（2）的特殊情形. 在这个定义中，包含两层意思：1° 曲面上每点的坐标满足方程；2° 坐标满足方程的点在曲面上. 因此，曲面就是方程所代表的几何图形，方程就是曲面的代数表示. 曲面上的几何性质，对应于方程的代数性质；方程的代数性质，对应于曲面的几何性质. 这样，通过对于方程性质的研究，就可以得到曲面的性质.

可能遇到坐标满足方程（2）的点仅是有限个，这时，曲面也就由有限个点组成. 例如，方程

$$x^2+y^2+z^2=0$$

显然，只被数组(0，0，0)所满足，也就是说，这个方程所表示的曲面变成一个点，即坐标原点.

还可能有这样的特殊情形，空间没有任何实点使得它的坐标能够满足已知方程. 例如，方程

$$x^2+y^2+z^2+1=0$$

不被任何实的三数组所满足，也就是说，方程所表示的曲面不含任何实点，这种曲面，我们叫做零曲面. 但在这种情况下，有的点如点 $M(1, i, i)$ 满足方程，但它不再是实点，因此也可以认为，存在满足已知方程的三数组 (x, y, z)，其中至少有一个是复数. 这样的三数组叫做“虚点”，而数 x, y, z 是它的“坐标”，并且也记作 $M(x, y, z)$.

满足已知方程的所有虚点的集合叫做虚曲面.

如果已知方程具有两个变量，有一个变量不出现，例如，方程

$$F(x, y) = 0 \qquad (3)$$

若把方程（3）看做 Oxy 平面上的方程，它表示一条曲线；如果把它看做空间的方程，它表示一个曲面。现在，我们来考查一下，方程（3）所表示的是什么样的曲面.不难看出，若点N（$x, y, 0$）的坐标满足方程（3）则任一点 $M(x, y, z)$的坐标也满足方程（3），点 $M(x, y, z)$ 在过点N且平行于 Oz 轴的直线上（图74）。因此，方程（3）在空间是一条动直线的轨迹方程，该直线平行于 Oz 轴而且通过 Oxy 平面上方程（3）所确定的曲线。这样的曲面，我们叫做**柱面**。已知曲线 $F(x, y) = 0$叫做**准线**。动直线叫做**直母线**。同理可知，方程 $F(y, z) = 0$ 和 $F(x, z) = 0$ 分别表示直母线平行于 Ox 轴和 Oy 轴的柱面。

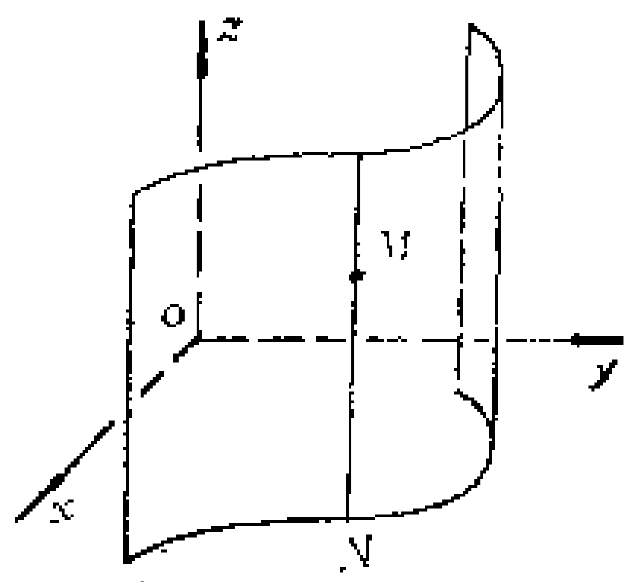


图 74

在直角坐标系中，曲面方程可分为代数方程和超越方程。如果方程 $F(x, y, z) = 0$左边是多项式，也就是关于 x, y, z 的有理整函数，则所确定的曲面叫做**代数曲面**。所有非代数曲面叫做**超越曲面**。例如，方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

和

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Ky + Iz + M = 0$$

所确定的曲面都是代数曲面。对于代数曲面，还可按照方程的次数来区分，我们把代数方程的次数叫做它所确定的曲面的次数。例如 n 次代数方程所确定的曲面叫做 **n 次代数曲面**。在第三章中，我们讨论过，每个三元一次方程确定一个平面，因此，我们也把平面叫做一次曲面。也就是说，平面可以看做曲面的特例。

在空间解析几何里，除了经常使用直角坐标方程 $F(x, y, z)$

$=0$ 表示曲面外，在某些情况下，有时也使用所谓参数方程。

在给定的空间直角坐标系$Oxyz$中，把坐标 x, y, z 表成两个变数 u 和 v 的函数的表达式

$$\left.\begin{array}{l} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \\ z=z(u, v) \end{array}\right\}$$

叫做曲面的参数方程。

例如，在第一章的空间极坐标系中，我们已知空间不在 Oz 轴上的任意一点M，它的位置可用极坐标 $(\gamma, \theta, \varphi)$来确定。如果我们给定半径为某一常数 γ_0，那末就得到一个确定的球面（如图75，需注意这里 φ 的标法略有不同）。而这个球面的参数方程很容易得到为

$$\left.\begin{array}{l} x=\gamma_0 \cos\theta \cos\varphi \\ y=\gamma_0 \sin\theta \cos\varphi \\ z=\gamma_0 \sin\varphi \end{array}\right\}$$

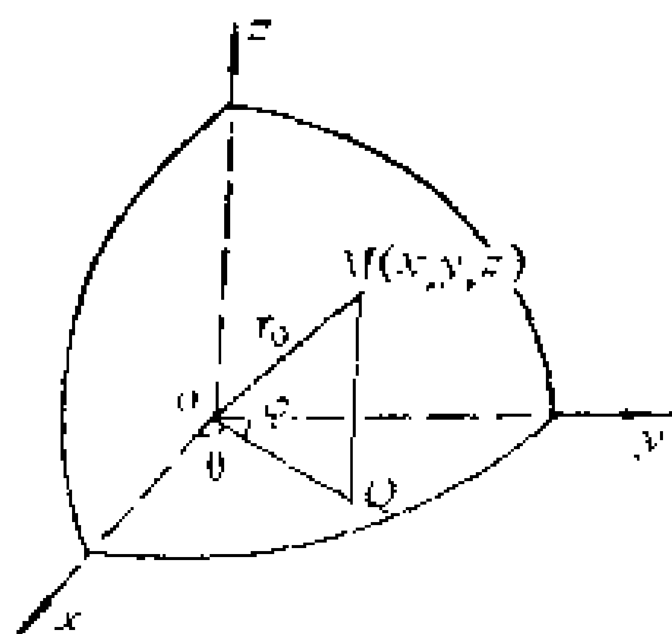


图 75

其中 θ, φ 为参数。θ 相当于地球的经度，φ 相当于地球的纬度。用 θ, φ 能够确定球面上点的位置，因而地球上点的位置可用经、纬度两个数来确定。

例1 已知动点 M 与点 $A(0,0,4)$，$B(0,0,-3)$ 的距离平方差等于7，试求这个点的轨迹方程。

解 设M是轨迹上的任意点，它的直角坐标为x, y, z。由已知条件，则有

$$|AM|^2-|BM|^2=7$$

而
$$|AM|=\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}$$

$$|BM|=\sqrt{x^2+y^2+(z+3)^2}$$

代入上式，则得

$$z=0$$

这就是所求的轨迹方程．实际上，它是一次曲面，也就是平面。

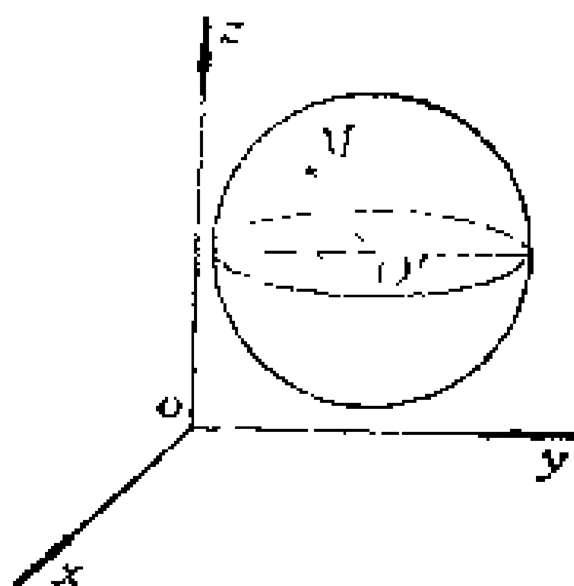


图 76

例 2 已知球面的中心为点 $O'(a,b,c)$，而且半径等于 R，求它的方程。

解 用(x,y,z)表示球面上任意一点M的坐标（图76）．从球面定义得知，点M到中心 O' 的距离等于半径 R，也就是

$$|\overrightarrow{O'M}|=R$$

若用点的坐标表示，则得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R$$

平方等式两边，消去根号，便得球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

或 $$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0$$

若球面中心在坐标原点，即 $a=b=c=0$，则球面方程变为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

从球面方程，不难看出它的特征：方程中二次项只有平方项x^2、y^2 和 z^2且系数相等，但不含有乘积（交叉）项 xy，yz和zx。

例 3 已知平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，且平行于不共线的向量$\vec{a}=\{l_1,m_1,n_1\}$，$\vec{b}=\{l_2,m_2,n_2\}$（图77）试求该平面的参数方程。

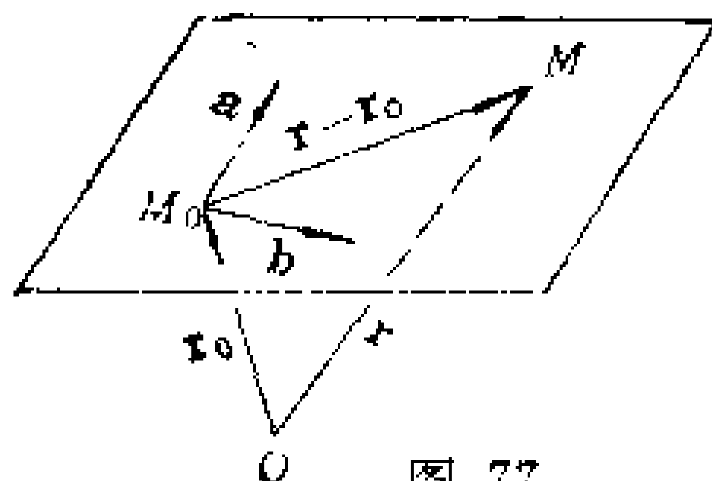


图 77

解 设$M(x,y,z)$为平面上的任意一点，$\vec{r}=\{x,y,z\}$ 和$\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$是点$M$和$M_0$的径向量，则向量$\vec{r}-\vec{r}_0$，$\vec{a}$，$\vec{b}$共面。

由三个向量共面的条件可知，$\vec{r}-\vec{r}_0$必为$\vec{a}$和$\vec{b}$的线性组合，即

$$\vec{r}-\vec{r}_0=u\vec{a}+v\vec{b}$$

若用坐标的形式表示出来，则得

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+ul_1+vl_2 \\ y=y_0+um_1+vm_2 \\ z=z_0+un_1+vn_2 \end{array}\right\}$$

这就是所求平面的参数方程，其中 u,v 是参数。

§2 曲线方程

空间任何曲线都可以看做同时属于两个曲面的点的轨迹，即两个曲面的交线。

设 $\Phi(x,y,z)=0$和 $F(x,y,z)=0$ 是两个已知曲面方程。坐标满足方程组

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

的点的轨迹是一条空间曲线。方程（1）叫做**曲线方程**。

若已给曲线方程（1），则可组成如下形状的方程

$$p\Phi(x,y,z)+qF(x,y,z)=0 \qquad (2)$$

这里，p 和 q 是不同时为零的实数。方程（2）是个曲面方程。因为，曲线（1）上点的坐标满足方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 和 $F(x,y,z)=0$，所以对于任意的 p 和 q，它们的坐标也必满足方程（2）；因此，对于不同的 p 和 q 的值，方程（2）将确定通过曲线（1）的不同的曲面，即方程（2）是个曲面束。这样，已知的空间曲线可用通过它的任意两个曲面方程表出。换句话说，方程组（1）可用和它等价的任何两个较简单的方程联立的方程组来代替它。

如果要求 $F(x,y,z)=0$ 和 $\Phi(x,y,z)=0$ 所确定的曲线与曲面 $\Psi(x,y,z)=0$ 的交点时，就是求联立方程

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \\ \Psi(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$$

的解，也就是求这些曲面的公共点的坐标。所以求曲面与曲线交点或三个曲面交点的几何问题与解三元联立方程的代数问题是相同的。

如果把曲线看做动点的轨迹，那末就可把动点的坐标看做某个辅助变量的函数. 例如，形如

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\xi(t) \end{array}\right\}$$

的方程. 这样的方程叫做曲线的**参数方程**。在第三章讲过的直线的参数方程就是曲线参数方程的一种特殊情形。

例 1 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $z=\frac{1}{2}$ 相交于一个圆，写出这个圆的方程。

解 所求的圆的方程应当是

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad (1)$$

或者是

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=\frac{3}{4} \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad (2)$$

方程组（1）和（2）表示同一个圆。但是，从两个方程组可以看出，通过圆的曲面是不同的。第一个方程组表示圆是球面与一个平面的交线，第二个方程组却表示圆是一个圆柱面和一

个平面的交线。

例 2　求下列三个曲面的交点：

$$(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=25 \qquad (1)$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16 \qquad (2)$$

$$z=3 \qquad (3)$$

解　从已给的方程可以看出，所求的点就是两个球面与一个平面的公共点。因此，求交点就是求方程（1），（2），（3）的公共解。

将 $z=3$ 代入方程（1）和（2），脱去括弧，则得

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2x+2y=14 \\ x^2+y^2-2x-2y=14 \end{array}\right\}$$

由此得到 $x+y=0$，$x^2+y^2=14$；所以 $y=-x, x=\pm\sqrt{7}$。因此，所求三个曲面的交点为$(\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 3)$ 和 $(-\sqrt{7}, \sqrt{7}, 3)$ 。

例 3　一动点 P 在半径为 r 的圆柱面上以角速度 ω 作等速圆周运动，同时又以速度 v 沿平行于轴线的方向作等速直线运动，P 点运动的轨迹叫做圆柱螺旋线（图78），试求出它的参数方程。

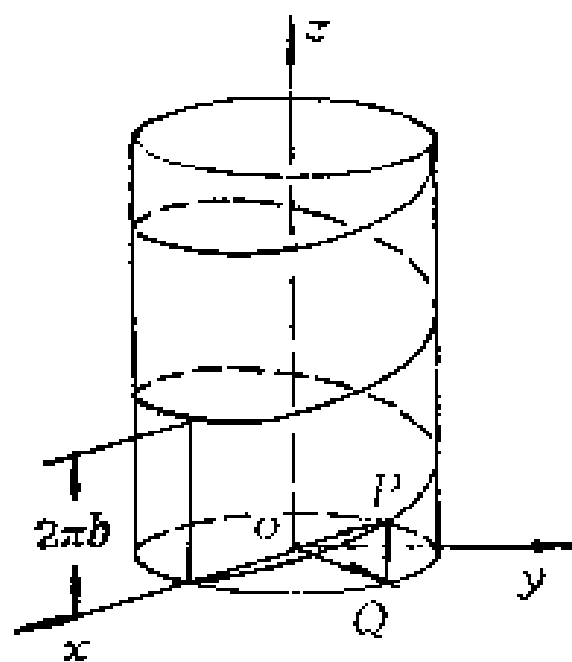


图 78

解　设 P 是螺旋线上任意一点，它的坐标为(x, y, z)。设动点由 A 出发，经过时间 t，从 A 运动到 P，这一过程可以看做点在 Oxy 平面上沿圆周从 A 运动到 Q，$\angle AOQ=\omega t$，再从 Q 沿 z 轴方向运动到 P，$QP=vt$，因此

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$$

而

$$\overrightarrow{OQ}=r\cos\omega t\boldsymbol{i}+r\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{QP}=vt\boldsymbol{k}$$

记 $\omega t=\theta$，则 $t=\frac{\theta}{\omega}$，从而，圆柱螺旋线的向量表示式是

$$\overrightarrow{OP}=r\cos\theta i+r\sin\theta j+\frac{v}{\omega}\theta k$$

如令 $\frac{v}{\omega}=b$，可把上式改成参数形式，即

$$\left.\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=b\theta\end{array}\right\}\quad(0\leqslant\theta<\infty)$$

当 $\theta=2\pi$ 时，$z=2\pi b$，这表示 P 点绕 Oz 轴转动一周后，在 Oz 轴方向上移动的距离。我们把这个距离叫做**螺距**。

§3 旋转曲面

任意平面曲线绕它所在平面上的已知直线旋转所生成的曲面叫做**旋转曲面**。平面曲线叫做旋转曲面的**母线**。已知直线叫做**旋转曲面的旋转轴**。

从定义可以看出，过旋转曲面上一点垂直于旋转轴的平面与旋转曲面的交线是一个圆，它的中心是平面与旋转轴的交点，半径等于中心与已知点的距离。这样的圆也叫**纬线**，而旋转曲面与以旋转轴为界的半平面的交线叫做**线线**。

假设在平面 Oyz 上，已知一条曲线的方程是

$$F(y,z)=0 \tag{1}$$

我们来求这条曲线绕 Oz 轴旋转所构成的旋转曲面的方程。

在旋转曲面上任取一点 $M(x,y,z)$。过点 M 作垂直于旋转轴 Oz 的平面，设它与 Oz 轴交于点 $O'(0,0,z_0)$，与已知曲线交于点 $N(0,y_0,z_0)$（图79）。因为点 N 在曲线上，所以它的坐标必满足曲线的方程

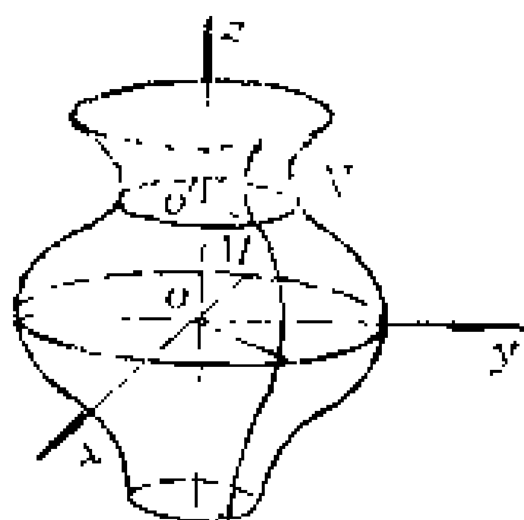


图 79

$$F(y_0, z_0)=0 \qquad (2)$$

因为，点M和点N都在垂直于Oz轴的平面上，所以它们的竖坐标必相等，也就是

$$z_0=z$$

又因为，点$M(x,y,z_0)$和点$N(0,y_0,z_0)$都在点N画出的同一圆周上，所以半径$O'M=O'N$。

因此，$y_0=O'N=O'M=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z_0-z_0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$．把$y_0$，$z_0$的表达式代入（2）式，则得

$$F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0 \qquad (3)$$

方程（3）就是我们所要求的旋转曲面的方程。

从方程（3）可以看出，**在平面 Oyz 上的曲线 $F(y,z)=0$，绕轴Oz旋转所构成的旋转曲面的方程，只要用$\sqrt{x^2+y^2}$代换 y，而z 不变，就可以得到。**

同样，绕其它坐标轴的旋转曲面的方程，可类似地得到。

二次曲线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫做二次旋转曲面。现在，我们来求这些旋转曲面的方程。

1° 设在平面 Oyz 上，已知椭圆方程

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right\}$$

绕轴 Oz 旋转所得到的曲面叫做**旋转椭圆面**（图80）。它的方程为

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

或
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2° 设在平面 Oyz 上，已知双曲线方程

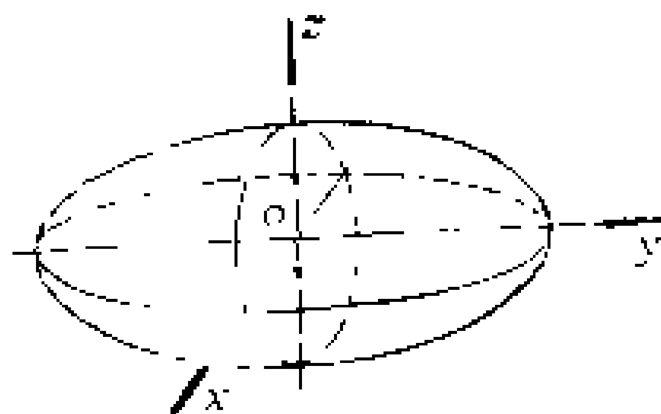


图 80

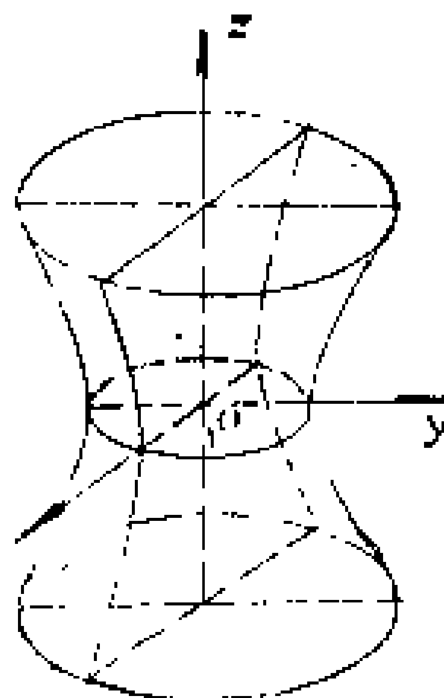


图 81

$$\left.\begin{array}{r}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right\}$$

绕虚轴 Oz 旋转所得到的曲面叫做**单叶旋转双曲面**（图81）．它的方程为

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

或

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

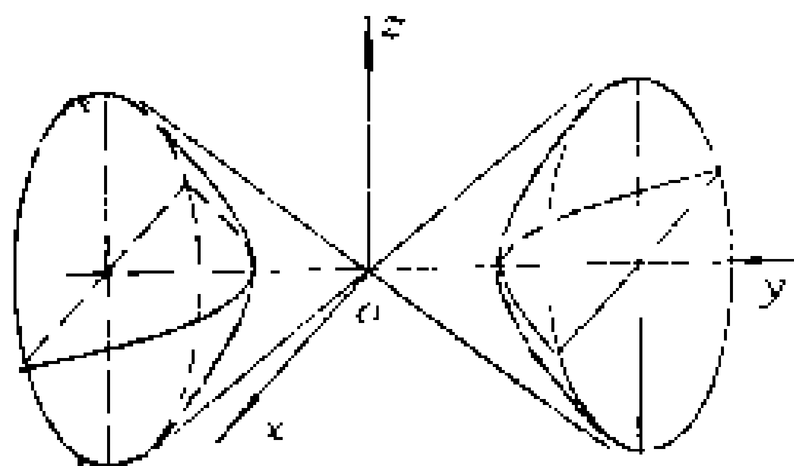


图 82

如果上述曲线绕轴 Oy 旋转所得到的曲面叫做**双叶旋转双曲面**（图82）．它的方程为

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{(\sqrt{x^2+z^2})^2}{c^2}=1$$

或

$$-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

3° 已知抛物线方程为

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2pz \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

绕它的对称轴 Oz 旋转所得到的曲面叫做**旋转抛物面**（图83）。它的方程为

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2=2pz$$

或

$$x^2+y^2=2pz$$

4° 已知两条相交直线

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=0 \\ x&=0 \end{aligned}\right\}$$

组成的曲线，如果绕对称轴 Oz 旋转所得到的曲面叫做**圆锥面**（图84）．它的方程为

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

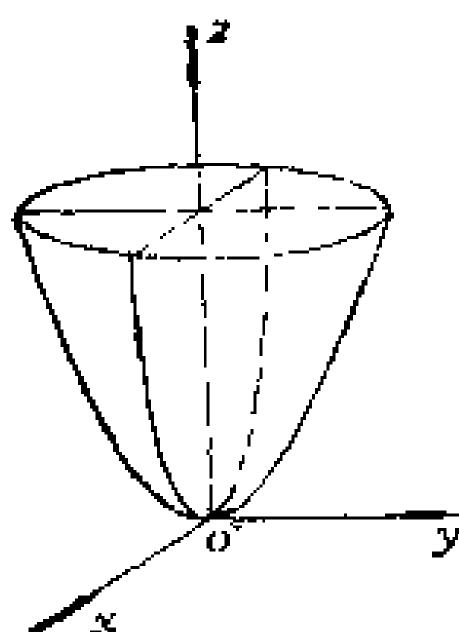


图 83

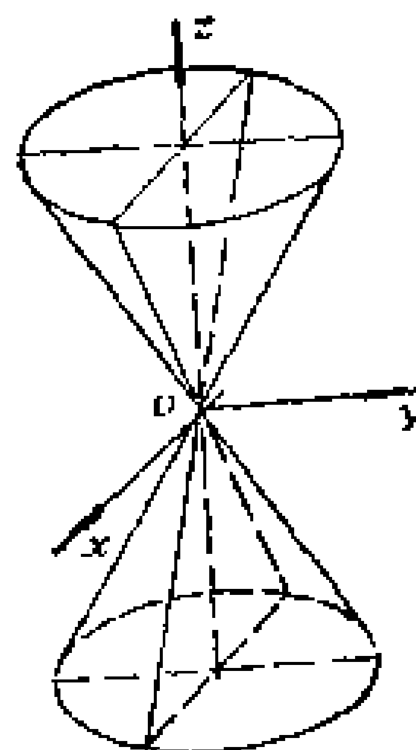


图 84

或

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

5° 已知两条平行直线

$$\left.\begin{array}{r} y^2-a^2=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$$

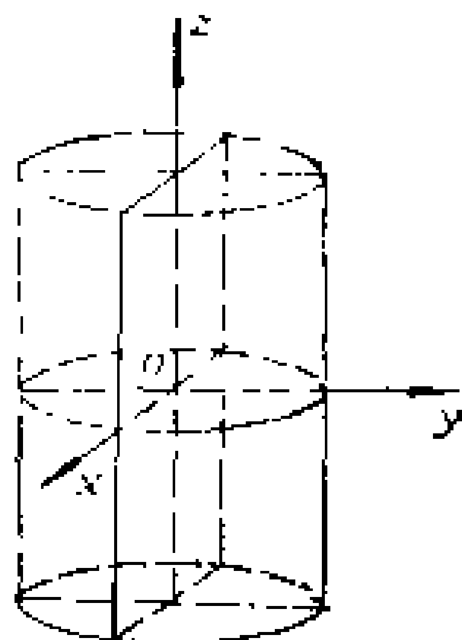


图 85

组成的曲线，如果绕轴 Oz 旋转，得到的曲面叫做**圆柱面**（图85）。它的方程为

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2-a^2=0$$

或

$$x^2+y^2-a^2=0$$

从上述旋转曲面方程可以看出，具有三个变量的二次方程 $F(x,y,z)=0$，若 F 是一个变量及其他两个变量平方和的函数，例如 $F\equiv\varphi(x^2+y^2,z)$，$x^2,y^2$ 的系数又相等，则 $F(x,y,z)=0$ 必确定一个以 Oz 为轴的旋转曲面。

例1 已知 l_1 和 l_2 是两条既不共面也不垂直的直线，求l_2绕l_1旋转所成的曲面的方程。

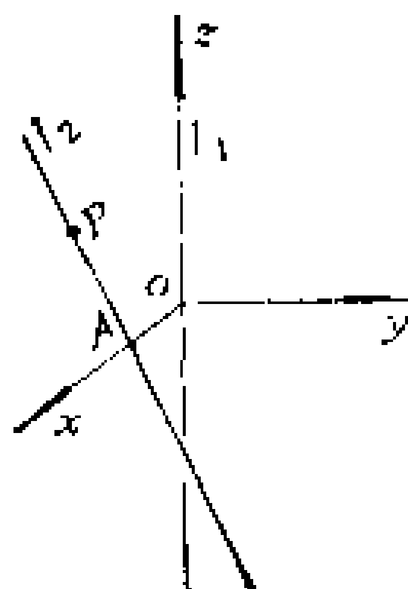


图 86

解 取 l_1 为 Oz 轴，l_1 与 l_2 的公垂线为 Ox 轴。因而，l_2就垂直于 Ox 轴（图86）。设 l_2 与 Ox 轴的交点为 $A\ (a,0,0)$，方向数为 $(0,m,n)$ 或 $(0,1,b)$。于是 l_2 的参数方程为

$$l_2:\quad\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=t \\ z=bt \end{array}\right\}$$

因为 l_1 与 l_2 既不共面又不垂直，所以 $a\neq0$，$b\neq0$。设$P(x, y, z)$为所求曲面上的任意一点，过点 P 作 Oxy 平面的平行平面，从 l_2 的方程可以看出，这个平面与 l_2 的交点为$\left(a, \frac{z}{b}, z\right)$。因点 P 在曲面上，所以点 P 与点$\left(a, \frac{z}{b}, z\right)$到 Oz 轴的距离相等，即

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2+\frac{z^2}{b^2}}$$

或

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2b^2}=1$$

这就是所求曲面的方程。显然，曲面是单叶旋转双曲面。

例 2　已知母线是圆；它的方程为

$$\left.\begin{array}{r}(y-a)^2+z^2=R^2\\ x=0\end{array}\right\}$$

试求绕 Oz 轴旋转所成曲面的方程。

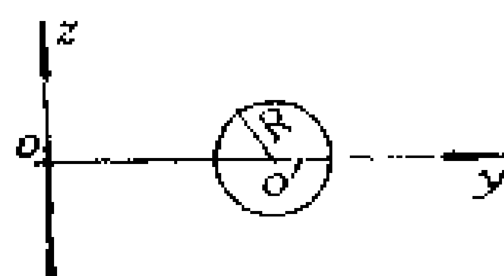


图 87

解　已知母线是圆，由它的方程可知，此圆如图87。如果圆周绕 Oz 轴旋转，就描出所谓圆环面（图88），如汽车轮胎的形状。若以$\sqrt{x^2+y^2}$代替圆周方程中的 y，则得

$$(\sqrt{x^2-y^2}-a)^2+z^2=R^2$$

化简后为

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$$

这就是圆环面的方程。可见，圆环面是四次曲面。由此可知，二次曲线绕它的非对称轴

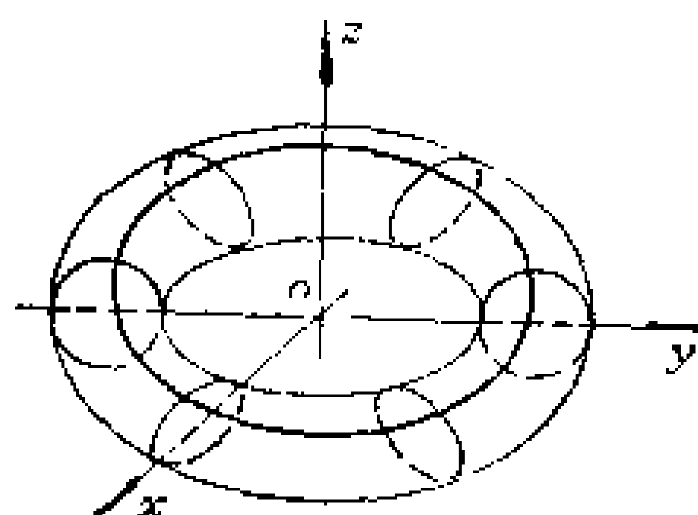


图 88

旋转所得到的旋转曲面一般不是二次的。

到此为止，我们研究了旋转曲面，下面我们将研究一般的二次曲面，为此我们先考虑空间的一种点变换，也就是，所谓伸缩变换。

把弹性物体加以压力或拉力，物体就会变形。在最简单的情形下，物体是按所加力量的方向收缩或伸长。为了把这种客观情况反映到解析几何里来，我们引进伸缩变换的概念。

对于空间任意一点M，设它的对应点为M'，使直线MM'垂直已知平面 π（图89）。并且

$$\frac{PM}{PM'} = k \quad (k>0, \text{常数})$$

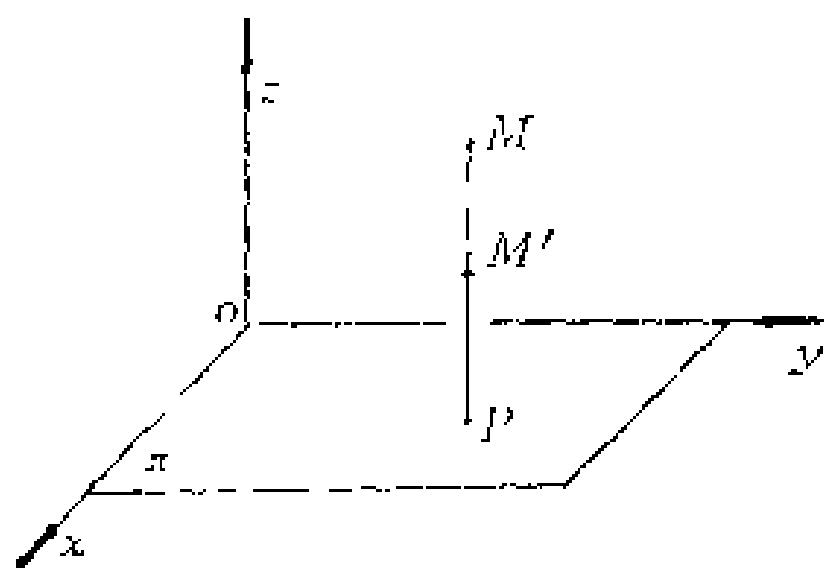


图 89

我们把这种变换叫做空间对平面π的伸缩变换。k叫做伸缩系数。

如果建立了空间坐标系，如图89那样，就可得到沿三个轴 Ox，Oy，Oz 方向的伸缩变换公式分别为

$$\left.\begin{array}{l} x = k_1x \\ y = y \\ z = z \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = x \\ y = k_2y \\ z = z \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = k_3z \end{array}\right\}.$$

引进了伸缩变换概念之后，我们就可以把旋转二次曲面变成一般的二次曲面。

§4 椭 圆 面

我们已知旋转椭圆面的方程为

$$\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

把它按公式

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \frac{b}{a}x \\
Y &= y \\
Z &= z
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

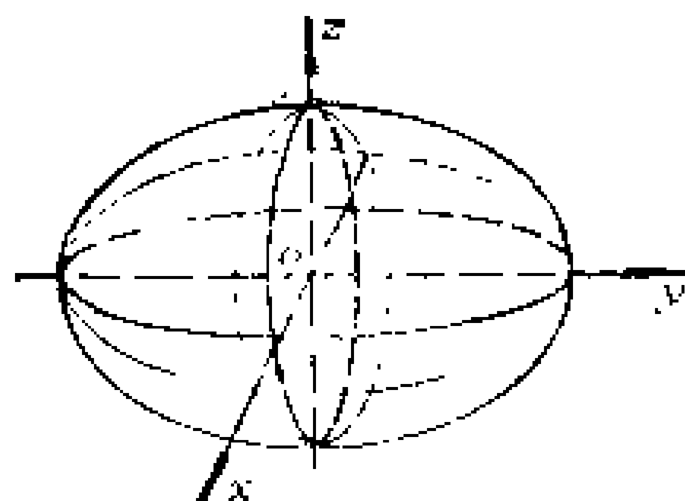


图 90

对平面Oyz进行伸缩变换，所得到的曲面叫做椭圆面（图90），若把（2）代入（1），则得它的方程为

$$
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)
$$

方程（3）叫做椭圆面的标准方程。

因为方程（3）只含有变量x, y, z的平方项，因此可知，椭圆面对于三个坐标面、三个坐标轴以及原点都对称。坐标面为对称平面，坐标轴为对称轴，原点为对称中心。

由方程（3）可知，$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$，$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，$\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$，也就是$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$，$|z|\leqslant c$，因此，椭圆面在六个平面

$$
x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c
$$

所围成的长方体内，因而它是“有界”的曲面。

我们为了研究二次曲面的形状，常用所谓平行截口法。所谓截口是指已知曲面与截平面的交线。

为了进一步了解椭圆面的形状，我们来研究它的平面截口。曲面（3）由平面Ozx的截口方程是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1 \\
y&=0
\end{aligned}\right\}
$$

不难看出，这个截口是平面Ozx上的一个椭圆，它关于轴Ox和Oz对称，两个半轴为a和c，并且分别在轴Ox和Oz

上。

由平面 Oyz 的截口方程是

$$\left.\begin{array}{r}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right\}$$

不难看出，这个截口是平面 Oyz 上的一个椭圆，它关于轴 Oy 和 Oz 对称，两个半轴为 b 和 c，并且分别在轴 Oy 和 Oz 上。

现在，我们来研究平行于平面 Oxy 的平面与已知椭圆面的截口。因为这样的平面，它的方程为

$$z=h$$

所以，它与已知椭圆面的截口由下面两个方程确定

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{array}\right\} \tag{4}$$

由（4）可以看出：

1° 当 $|h|<c$ 时，平面 $z=h$ 截椭圆面的截口是椭圆

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1\\ z=h\end{array}\right\} \tag{5}$$

这里，a' 和 b' 是

$$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

椭圆（5）关于平面 Ozx 和 Oyz 对称。并且当 $h=0$ 时，它的半轴 a' 和 b' 最大，$a'=a, b'=b$。这就是说，坐标平面 $z=0$ 的截口是最大的椭圆。当 $|h|$ 逐渐增大时，椭圆半轴 a' 和 b' 逐渐减小，也就是说，截平面离平面 Oxy 越远，截口椭圆越小。

2° 当 $|h|=c$，也就是 $h=\pm c$ 时，半轴 a' 和 b' 都变为零，也就是截口变为一点。这时，我们说，平面 $z=\pm c$ 切于

椭圆面.

3° 当 $|h|>c$ 时，平面 $z=h$ 与已知椭圆面不相交。也可以说，截口曲线是虚的。

由上述分析可知，椭圆面则是有三个对称平面，三个对称轴和一个对称中心的有限范围内的卵形曲面。

椭圆面的三个互相垂直的对称平面，叫做它的主平面，主平面的交线叫做主轴。在图90中，主平面与坐标平面重合，主轴与坐标轴重合。我们也常把量 $2a,2b,2c$ 叫做椭圆面的轴。它们的一半 a,b,c 叫做半轴。若 $a>b>c$，则 a,b,c 分别叫做椭圆面的长半轴，中半轴，短半轴。半轴不等的椭圆面叫做三轴椭圆面。椭圆面与其对称轴的交点叫做顶点。

若半轴 a,b,c 中，任何两个相等时，曲面就变成前边讲过的旋转椭圆面。当 $a=b=c$ 时，方程（1）就变为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，这时，椭圆面就变为球面。也就是，球面是椭圆面的特殊情形。

关于椭圆面的得出方法，我们先是由一个椭圆绕它的对称轴旋转得到旋转椭圆面，然后经过伸缩变换得出椭圆面。有的读者可能提出：椭圆面（或其它二次曲面）能否象定义椭圆那样用点的轨迹来定义呢？我们说，用那种方法定义是不充分的，因为它只能定义出旋转椭圆面，而得不出椭圆面。

§5 单叶双曲面

我们已知单叶旋转双曲面的方程为

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

如果按公式

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{b}{a}x\\ Y&=y\\ Z&=z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

对它进行伸缩变换，所得到的曲面叫做**单叶双曲面**（图91）．若把（2）代入（1），则得它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

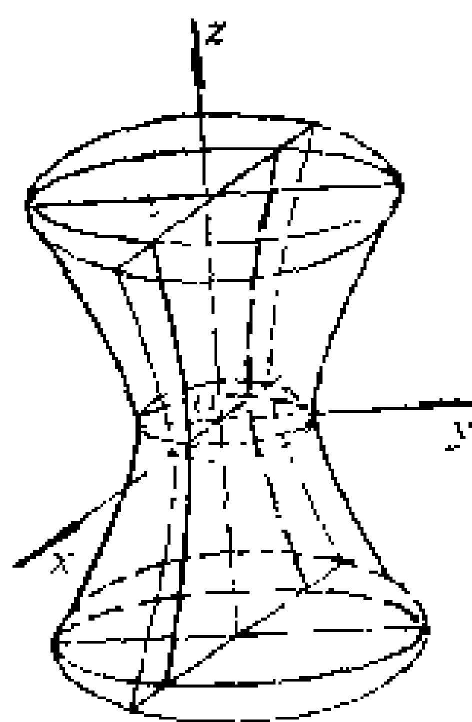


图 91

方程（3）叫做**单叶双曲面的标准方程**。

因为方程（3）只含有变量 x, y, z 的平方项，所以，单叶双曲面对于三个坐标面、三个坐标轴以及原点都对称。坐标面为对称平面，坐标轴为对称轴，原点为对称中心。

为了进一步了解单叶双曲面的形状，我们来研究它的平面截口。曲面（3）由平面 Ozx 的截口方程为

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{array}\right\}$$

不难看出，这个截口是平面 Ozx 上的一个双曲线，它关于轴 Ox 和 Oz 对称，实半轴为 a，虚半轴为 c，并且分别在轴Ox 和 Oz 上。

由平面 Oyz 的截口方程为

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right\}$$

不难看出，这个截口是平面 Oyz 上的一个双曲线，它关于轴 Oy 和 Oz 对称，实半轴为 b，虚半轴为 c，并且分别在轴 Oy 和 Oz 上。

现在，我们来研究平行于平面 Oxy 的平面截已知曲面的截口。因为这样的平面，它的方程为

$z = h$

所以，它截已知单叶双曲面的截口由下面两个方程确定

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{array}\right\} \qquad (4)$$

由（4）可知，平面 $z=h$ 截已知单叶双曲面的截口是椭圆

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1\\ z=h\end{array}\right\} \qquad (5)$$

这里，

$$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

椭圆（5）关于平面 Ozx 和 Oyz 对称，并且当 $h=0$ 时，它的半轴最小：$a'=a$，$b'=b$。也就是坐标面 $z=0$ 的截口是最小椭圆。这样的椭圆也叫做单叶双曲面的**腰椭圆**。

当$|h|$逐渐增大时，椭圆的半轴 a' 和 b' 也逐渐增大，也就是截面离平面 Oxy 越远，截口椭圆越大。可见，单叶双曲面在 Oz 轴方向上无限伸展。

由上述分析可知，**单叶双曲面则是有三个对称平面，三个对称轴，一个对称中心的向两个方向无限伸展的筒状曲面。**

单叶双曲面的三个互相垂直的对称平面叫做它的**主平面**，主平面的三条交线叫做主轴。在图91中，主平面与坐标面重合，主轴与坐标轴重合。我们也常把量$2a, 2b, 2c$叫做轴，它们的一半，a, b, c 叫做半轴。

若半轴 $a=b$，则曲面就变成了单叶旋转双曲面。

§6 双叶双曲面

我们已知，双叶旋转双曲面的方程为

$$-\frac{X^2}{c^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

如果按公式

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{c}{a}x \\ Y&=y \\ Z&=z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

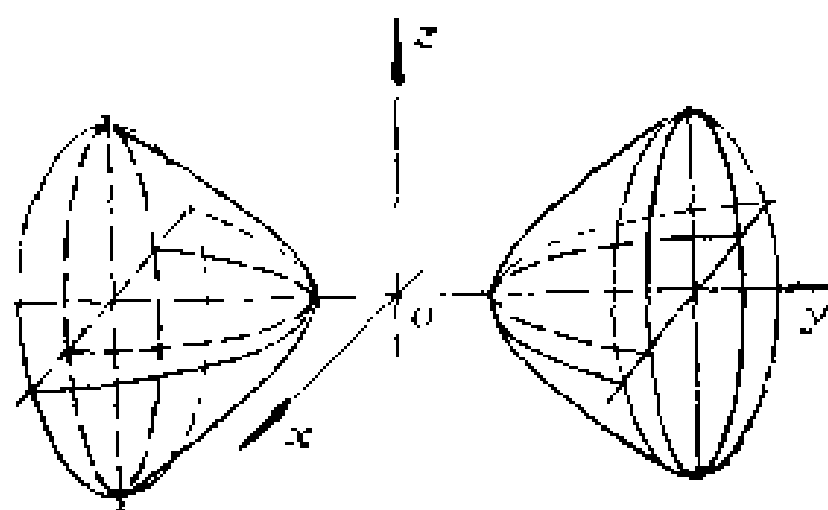


图 92

对双叶旋转双曲面进行伸缩变换，所得的曲面叫做**双叶双曲面**（图92）．若把（2）代入（1），则得它的方程为

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

方程（3）叫做**双叶双曲面的标准方程**．

和椭圆面，单叶双曲面类似，双叶双曲面对于三个坐标面、三个坐标轴以及原点也都对称．把它们分别叫做已知曲面的**对称平面**，**对称轴**和**对称中心**．

为了进一步了解双叶双曲面的形状，我们来研究它的平面截口．

双曲面（3），由平面 Oyz 的平面截口方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1 \\ x&=0 \end{aligned}\right\}$$

显然，这个截口是平面 Oyz 上的一个双曲线，它关于轴Oy 和 Oz 对称，实半轴为 b，虚半轴为 c，并且分别在轴 Oy 和Oz 上．

由平面 Oxy 的截口方程为

$$\left.\begin{array}{r}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{array}\right\}$$

显然，这个截口是平面 Oxy 上的一个双曲线，它关于轴 Oy 和 Ox 对称，实半轴为 b，虚半轴为 a，并且分别在轴 Oy 和 Ox 上。

现在，我们来研究平行于平面 Oxy 的平面截已知曲面的截口。因为这样的平面，它的方程为

$$y=h$$

所以，它截已知曲面的截口由下面两个方程确定

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{b^2}-1\\ y=h\end{array}\right\} \tag{4}$$

由（4）可以看出：

1° 当 $|h|>b$ 时，平面 $y=h$ 截双曲面的截口是椭圆

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1\\ y=h\end{array}\right\} \tag{5}$$

这里，

$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1},\quad c'=c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$$

椭圆（5）关于平面 Oxy 和 Oyz 对称，并且当 $|h|$ 逐渐增大时，椭圆的半轴 a' 和 c' 也逐渐增大．也就是，截平面离平面 Oxz 越远，截口椭圆越大。

2° 当 $|h|=b$，也就是 $h=\pm b$ 时，半轴 a' 和 b' 都变为零。也就是平面 $y=b$ 和 $y=-b$ 截双曲面的截口变为一点。这时，平面 $y=\pm b$ 切于双叶双曲面。

3° 当 $|h|<b$ 时，平面 $y=h$ 与双曲面不相交，或者说，截口曲线是虚的。因此，在 $y=b$ 与 $y=-b$ 两个平面之间没有双叶双曲面的实点．也就是曲面分为两个部分，所以称

为双叶双曲面.

由上述分析可知，**双叶双曲面则是有三个对称平面，三个对称轴，一个对称中心的两叶无限伸展的杯状曲面.**

双叶双曲面的三个互相垂直的对称平面叫做它的**主平面**，主平面的三条交线叫做它的**主轴**. 在图92中，主平面与坐标面重合，主轴与坐标轴重合. 我们也常把量$2a,2b,2c$叫做双叶双曲面的轴，它们的一半 a,b,c 叫做半轴.

当 $a=c$ 时，曲面就变成双叶旋转双曲面.

§7 椭圆抛物面

椭圆抛物面，虽然也可由旋转抛物面经过伸缩变换得到，但是，为了应用移动的观点，也是为了下一节导出双曲抛物面作些准备，我们想采用另一种方法得出椭圆抛物面和它的方程.

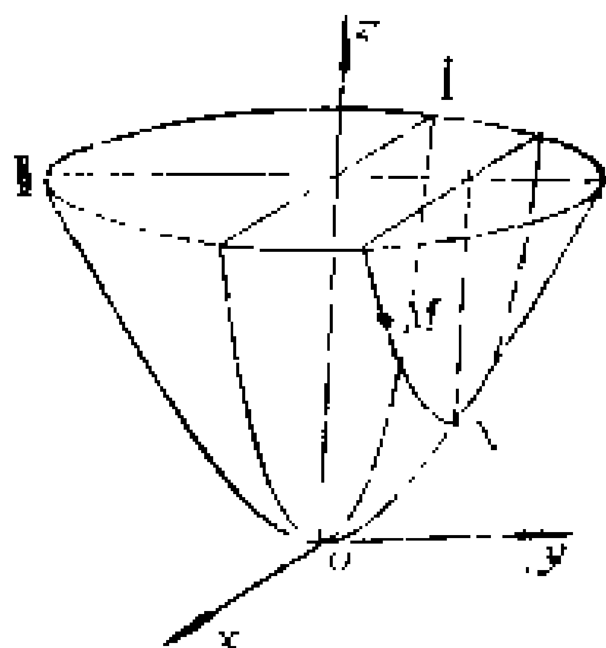


图 93

如果取两条抛物线（图93中的Ⅰ，Ⅱ），它们所在的平面互相垂直，有公共顶点和轴，而凹向是相同的. 让其中一条抛物线（例如Ⅰ）平行于自身而移动，同时使其顶点总在另一抛物线（例如Ⅱ）上，那末，这个移动的抛物线描画出一个曲面，我们把这样的曲面叫做**椭圆抛物面**.

现在，我们来导出椭圆抛物面的方程.

设已知两个抛物线方程为

$$Ⅰ:\quad \left.\begin{aligned} X^2 &= 2pZ \\ Y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (p>0)$$

$$Ⅱ:\quad \left.\begin{aligned} Y^2 &= 2qZ \\ X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (q>0)$$

假定曲面是移动抛物线Ⅰ得到的，在曲面上任取一点 $M(x,y,z)$，并且通过点M作一个垂直于 Oy 轴的平面 $Y=y$。这个平面正好是移动抛物线Ⅰ通过点M时所在的平面。这时，抛物线的顶点 $N(0,y,Z)$ 按已给条件在抛物线Ⅱ上。因此，过M点的抛物线方程具有如下形状：

$$\left.\begin{aligned}(x-0)^2&=2p(z-Z)\\ Y&=y\end{aligned}\right\}$$

由于点 $N(0,y,Z)$ 在抛物线Ⅱ上，所以它的坐标必满足方程Ⅱ，即 $y^2=2qZ$ 或 $Z=\dfrac{y^2}{2q}$。因此，所求曲面方程为

$$x^2=2p\left(z-\frac{y^2}{2q}\right)$$

或

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (1)$$

这里，p,q 同为正数，并称为椭圆抛物面的参数。方程（1）叫做**椭圆抛物面的标准方程**。

因为方程（1）只含有变量 x,y 的平方项，因此可知，坐标面 Oyz 和 Oxz 为抛物面的对称平面，Oz 轴为它的对称轴，但抛物面没有对称中心。

为了进一步了解椭圆抛物面的形状，我们来研究它的平面截口。已知曲面由平面 Ozx 的截口就是抛物线Ⅰ，它的方程为

$$\left.\begin{aligned}x^2&=2pz\\ y&=0\end{aligned}\right\}$$

由平面 Oyz 的截口就是抛物线Ⅱ，它的方程为

$$\left.\begin{aligned}y^2&=2qz\\ x&=0\end{aligned}\right\}$$

现在，我们来研究平行于平面 Oxy 的平面截口。因为这

样的平面，它的方程为

$$z=h$$

所以，它截已知曲面的截口由下面两个方程确定

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h\\ z=h\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

由（2）可知：

1° 当 $h>0$ 时，平面 $z=h$ 截椭圆抛物面的截口是椭圆。

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1\\ z=h\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

这里 $a'=\sqrt{2ph}$，$b'=\sqrt{2qh}$

椭圆（3）关于平面 Ozx 和 Oyz 对称。当 h 逐渐增大时，椭圆的半轴也逐渐增大，也就是截平面离平面Oxy越远，截口椭圆越大。所以，曲面在上半空间无限伸展。

2° 当 $h=0$ 时，半轴 a' 和 b' 都变为零，也就是平面 $z=0$截椭圆抛物面的截口变成一点，因此平面 $z=0$ 切于抛物面。这个切点也称为椭圆抛物面的**顶点**。

3° 当 $h<0$ 时，平面 $z=h$ 与椭圆抛物面不相交，或者说截口曲线是虚的。因此，下半空间没有椭圆抛物面上的实点。

由上述分析可知，**椭圆抛物面则是有两个对称平面，一个对称轴的一叶无限伸展的杯状曲面。**

椭圆抛物面的两个互相垂直的对称平面叫做它的**主平面**，主平面的交线叫做它的**主轴**。在图93中，主平面与坐标面 Ozx 和 Oyz 重合，主轴与 Oz 轴重合。

当 $p=q$ 时，椭圆抛物面就变成了旋转椭圆抛物面。

不能认为，椭圆抛物面就是双叶双曲面的一叶，那是一种误解。实际上，它们是具有不同性质的曲面。

§8　双曲抛物面

双曲抛物面，我们不能从旋转曲面作伸缩变换而得到．但是，可采用与上节同样的方法得出．

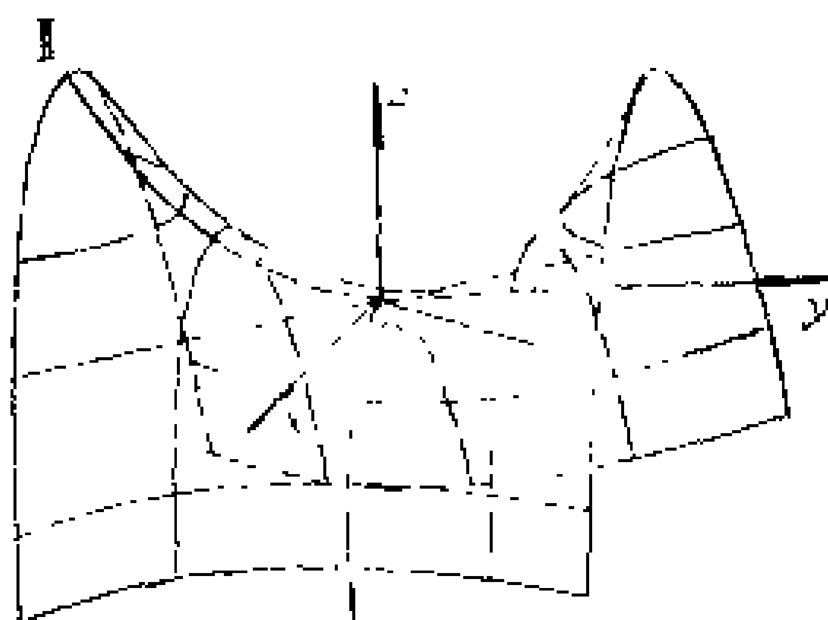


图 94

如果取两条这样的抛物线，它们所在的平面互相垂直，它们的顶点和轴都重合，但是它们的四向是不同的（如图 94 中的Ⅰ，Ⅱ）．让其中一条（如Ⅰ）平行于自己且使其顶点在另一条抛物线（如Ⅱ）上移动．那末，这条移动的抛物线便画出一个曲面，我们把这个曲面叫做双曲抛物面（图94）．

现在，我们导出双曲抛物面的方程．

设已知两条抛物线方程为

$$\text{Ⅰ:}\quad \left.\begin{array}{l} X^2 = -2pZ \\ Y = 0 \end{array}\right\} \quad (p>0)$$

$$\text{Ⅱ:}\quad \left.\begin{array}{l} Y^2 = 2qZ \\ X = 0 \end{array}\right\} \quad (q>0)$$

如同导出椭圆抛物面的方程一样，可得所求曲面方程为

$$x^2 = -2p\left(z - \frac{y^2}{2q}\right)$$

即

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

或

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z \tag{1}$$

这里，p,q 为正数，并称为双曲抛物面的参数。方程（1）叫做双曲抛物面的标准方程。

因为方程（1）只含有变量 x,y 的平方项，因此可知，坐标面 Oyz 和 Oxz 为对称平面，Oz 为对称轴，但没有对称中心。

为了进一步了解双曲抛物面的形状，我们来研究它的平面截口。

双曲抛物面由平面 Ozx 的截口就是抛物线Ⅰ，它的方程为

$$\left.\begin{array}{l} x^2=-2pz \\ y=0 \end{array}\right\}$$

由平面 Oyz 的截口就是抛物线Ⅱ，它的方程为

$$\left.\begin{array}{l} y^2=2qz \\ x=0 \end{array}\right\}$$

现在，我们来研究平行于平面 Oxy 的平面截已知曲面的截口，因为这样的平面，它的方程是

$$z=h$$

所以，它截已知曲面的截口由下面两个方程确定

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2h \\ z=h \end{array}\right\} \tag{2}$$

由（2）可知：

1° 当 $h<0$ 时，平面 $z=h$ 的截口是双曲线

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1 \\ z=h \end{array}\right\} \tag{3}$$

这个双曲线的半轴 a_1 和 b_1 是

$$a_1 = \sqrt{2p|h|}, \quad b_1 = \sqrt{2q|h|}$$

双曲线（3）关于平面 Ozx 和 Ozy 对称，且与平面 Ozx 相交。

2° 当 $h>0$ 时，平面 $z=h$ 的截口是双曲线

$$\left.\begin{aligned} -\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1 \\ z=h \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

这个双曲线的半轴 a_2, b_2 是

$$a_2 = \sqrt{2ph}, \quad b_2 = \sqrt{2qh}$$

双曲线（4）关于平面 Ozx 和 Oyz 对称，且与平面 Oyz 相交。

3° 当 $h=0$ 时，平面 $z=0$ 的截口是两条直线

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \\ z=0 \end{aligned}\right\}$$

也就是

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \\ z=0 \end{aligned}\right\} \text{和} \left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \\ z=0 \end{aligned}\right\}$$

由上述分析可知，双曲抛物面则是有两个对称平面，一个对称轴，无限伸展的鞍状曲面（图94）。

双曲抛物面的两个互相垂直的对称平面叫做它的主平面，主平面的交线叫做主轴。在图94中，主平面与坐标面重合，主轴与轴 Oz 重合。

§9 柱　　面

在本章第一节中，我们讨论了形如

$$F(x,y)=0$$

的方程，在空间坐标系中，它表示以平面曲线 $F(x,y)=0$ 为准线，直母线平行于 Oz 轴的柱面.

由此，不难得出一个一般的结论：**当直母线平行于一个坐标轴时，柱面的方程不包含对应的坐标．反之，一个不包含某个坐标的方程表示直母线平行于对应坐标轴的柱面．**

因此，一个坐标平面上的任意一条曲线都确定一个柱面，它的母线垂直于这个平面，柱面的方程就是曲线在坐标平面上的方程．例如，坐标平面 Oxy 上的每条二次曲线都确定一个柱面：

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

图 95

表示直母线平行于 Oz 轴，以 Oxy 平面上的椭圆为准线的柱面（图95）．这样的柱面叫做**椭圆柱面．**

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

表示直母线平行于 Oz 轴，以 Oxy 平面上的双曲线为准线的柱面（图96）．这样的柱面叫做**双曲柱面．**

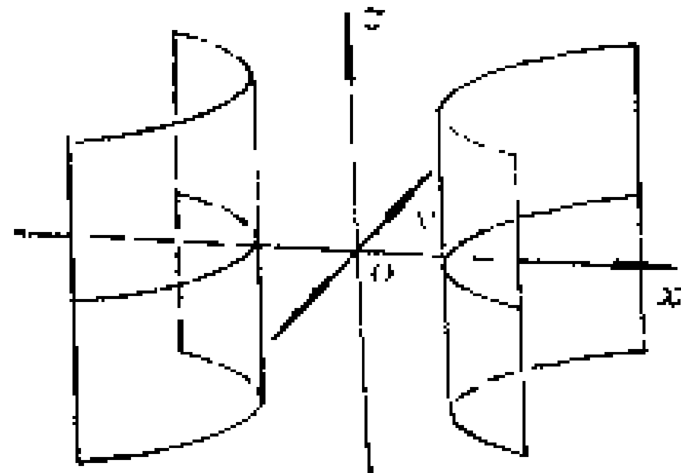


图 96

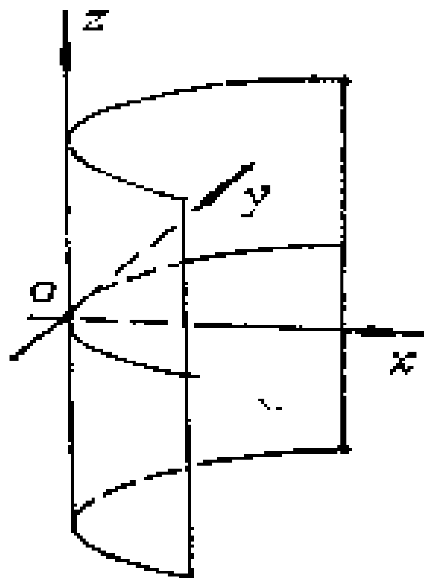


图 97

方程

$$y^2 = 2px$$

表示直母线平行于 Oz 轴，以 Oxy 平面上的抛物线为准线的柱面（图97）．这样的柱面叫做抛物柱面．

上述三种柱面，它们的方程都是二次的，所以统称为二次柱面．

需要注意，如果直母线不平行于坐标轴，柱面的方程就要包含所有的变量．

现在，我们引进柱面的一般概念．

一条直线 l 在空间平行于固定方向移动，但总和已知一条固定的曲线相交，这样所产生的曲面叫做**柱面**．直线 l 在移动中的每个位置叫做柱面的**直母线**，固定的曲线叫做**柱面的准线**．显然，柱面被它的准线和直母线方向完全确定．但是对于一个柱面，它的准线并不是唯一的．例如，任何一个与直母线不平行的平面和柱面的交线都可以作为它的准线，而且准线不一定是平面曲线．

在一般情形下，柱面的方程也不难求出．假定有个柱面，它的准线方程是

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

而它的直母线方程是

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n} \qquad (2)$$

其中，x,y,z 是母线与准线的交点坐标，X,Y,Z 是直母线上任意点的流动坐标，l, m, n 是直母线的方向数．只要从方程（1）和（2）中消去 x,y,z，便得到所求柱面的方程．

例1 设柱面的直母线平行于直线 $x=y=z$，而且准线的方程为

$$\left.\begin{aligned} x+y-z-1=0 \\ x-y+z=0 \end{aligned}\right\}$$

求这个柱面的方程。

解 由于直母线平行于直线 $x=y=z$，所以，直母线的方程可以写成

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}$$

若用 ρ 表示它们的共同比值，则直母线方程可改写为参数方程

$$x=X-\rho,\quad y=Y-\rho,\quad z=Z-\rho$$

把 x,y,z 代入准线方程，便得

$$\left.\begin{aligned} X+Y-Z-\rho-1=0 \\ X-Y-Z-\rho=0 \end{aligned}\right\}$$

消去 ρ，则得

$$2Y-2Z-1=0$$

这是通过准线而且平行于直线 $x=y=z$ 的平面方程。

例 2 设柱面的准线为

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{aligned}\right\}$$

面直母线的方向数是 $-1:0:1$，求这个柱面的方程。

解 因为直母线的方向数为 $-1:0:1$，所以，柱面直母线的方程可写为

$$\frac{X-x}{-1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}$$

如果用 ρ 表示它们的共同比值，那末，直母线方程可改写为参数方程

$$x=X+\rho,\quad y=Y,\quad z=Z-\rho$$

把 x,y,z 代入准线方程，得

$$\left.\begin{aligned} (X+\rho)^2+Y^2+(Z-\rho)^2=1 \quad &(*) \\ 2(X+\rho)^2+2Y^2+(Z-\rho)^2=2 \quad &(**) \end{aligned}\right\}$$

以 2 乘（*）再减去（* *），则得

$$(Z-\rho)^2=0$$

因此

$$\rho=Z$$

代入（*）或（* *）中，消去 ρ，则得所求柱面的方程为

$$(X+Z)^2+Y^2=1$$

§10 锥 面

我们已知，顶点在坐标原点，以 Oz 为轴的旋转锥面（圆锥面）的方程为

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \qquad (1)$$

对它进行伸缩变换

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{b}{a}x \\ Y&=y \\ Z&=z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

所得的曲面叫做锥面（图98）．把（2）代入（1）则得它的方程为

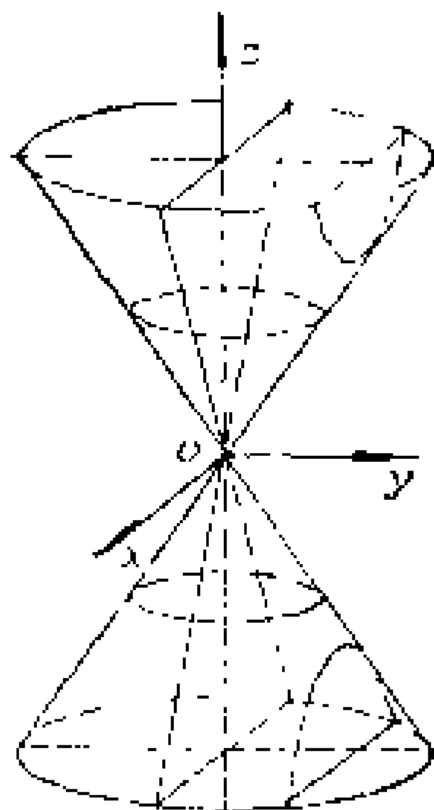


图 98

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (3)$$

方程（3）叫做**锥面的标准方程**。因为方程是二次的，所以曲面也叫做**二次锥面**。

我们进一步了解一下锥面的性质和形状。

因为方程（3）只含有变量 x,y,z 的平方项，所以，锥面对于坐标面、坐标轴和坐标原点都对

称，而且原点在曲面上。

如果用平面 $z=h$ 去截锥面，截口方程是

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{h^2}{c^2}\\ z&=h\end{aligned}\right\}$$

当 $h=0$ 时，截口就是原点。当 $|h|>0$ 时，截口是椭圆，而且随着$|h|$增大而增大。

如果用平面 $y=h$ 去截锥面，截口方程是

$$\left.\begin{aligned}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}&=\frac{h^2}{b^2}\\ z&=h\end{aligned}\right\}$$

当 $h=0$ 时，是两条相交于坐标原点的直线

$$\left.\begin{aligned}\frac{z}{c}+\frac{x}{a}&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\} \text{和} \left.\begin{aligned}\frac{z}{c}-\frac{x}{a}&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\}$$

当 $|h|>0$ 时，截口是实轴平行于 Oz 轴，虚轴平行于 Ox 轴的双曲线。

如果用平面 $x=h$ 去截锥面，截口也是双曲线，与上述情况类似。

锥面有个显著的特点：**顶点与曲面上任意其它点的联线全在曲面上**。如果顶点是原点，那末，顶点$(0,0,0)$与曲而上任一点 (x,y,z) 的连线上的点就是 (tx,ty,tz)，t 是任意实数。因此，对于顶点在原点的锥面，方程的特征就是：如果 (x,y,z) 满足方程，那末对于任意的实数 t，则(tx,ty,tz) 也满足方程。也就是，如果 $F(x, y, z)$ 是个齐次多项式，即 $F(tx,ty,tz)=\varphi(t)\ F(x,y,z)$，那末 $F(x,y,z)=0$ 就表示一个顶点在原点的锥面。

现在，我们引进锥而的一般概念。

设一运动着的直线通过定点面且和定曲线相交，这样的直

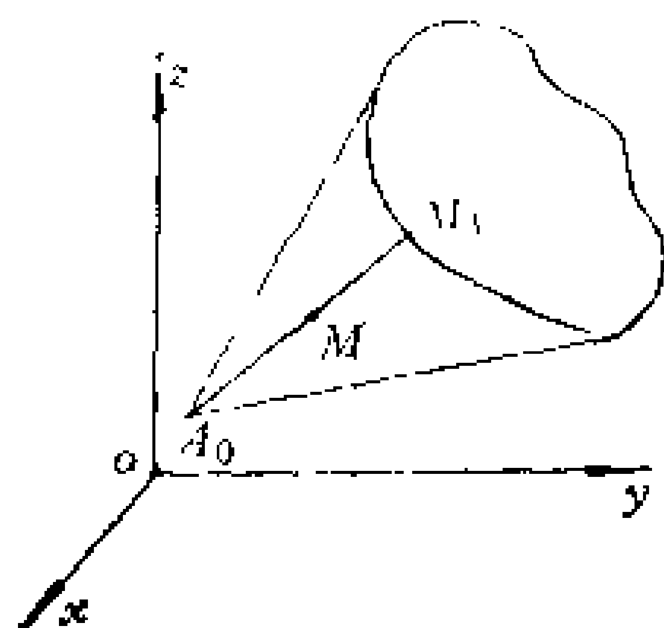


图 99

线所构成的曲面叫做锥面（图99），定点叫做锥面的顶点，定曲线叫做锥面的准线。构成曲面的直线叫做锥面的直母线。

在一般情形下，锥面的方程也不难导出。

如果已知一个锥面，它的准线方程为

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

顶点为 $A_0(x_0, y_0, z_0)$，而它的直母线方程必为

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0} \quad (5)$$

式中的 x, y, z 是直母线和准线的交点坐标，而X, Y, Z是直母线上任意点M的坐标。从（4）、（5）两式消去x, y, z，便得锥面方程。

下面，我们引进渐近锥面的概念。

如果已知单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (2)$$

和二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3)$$

有相同的半轴 a, b, c，则它们之间有密切的关系。

如果以平面 $z = h$ $(|h| > c)$ 去截曲面（1），（2），（3），则截口椭圆的半轴分别为

$$a' = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \qquad b' = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \tag{1'}$$

$$a'' = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \qquad b'' = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \tag{2'}$$

$$a''' = \frac{ah}{c} \qquad b''' = \frac{bh}{c} \tag{3'}$$

容易看出，无论$|h|$取大于 c 的什么值，椭圆(1')最大，(2')最小，(3')居中（图100）。也就是，$a''<a'''<a'$，$b''<b'''<b'$成立。又因为$|h|\to\infty$时，

$$\lim(a'-a'')=0,$$
$$\lim(b'-b'')=0$$

所以当$|h|$无限增大时，三个曲面无限接近。由此，我们把锥面（3）叫做双曲面（1）和（2）的**渐近锥面**。

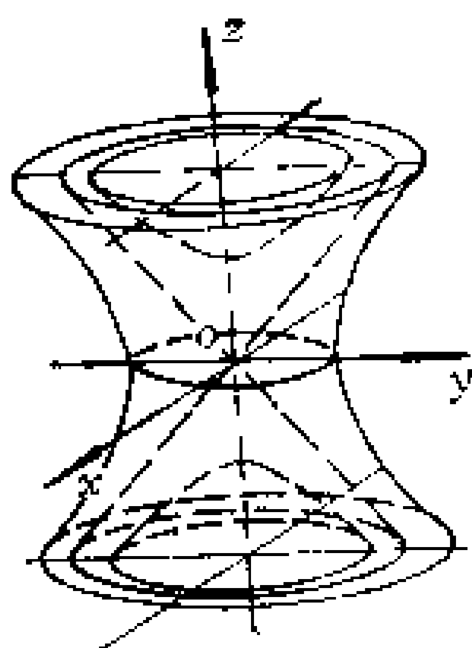


图 100

例 1　锥面的顶点在原点，而且准线方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

求锥面方程。

解　通过顶点(0，0，0)和准线上一点 (x,y,z)的直母线方程为

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z} \tag{* *}$$

为了从(＊)，(＊＊)中消去x,y,z，先把 $z=c$ 代入(＊＊)，得

$$x=c\frac{X}{Z} \qquad y=c\frac{Y}{Z}$$

再代入(＊)，得

$$\frac{c^2}{a^2}\frac{X^2}{Z^2}+\frac{c^2}{b^2}\frac{Y^2}{Z^2}=1$$

即

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

这就是所求的锥面方程。

例2 一个圆锥面，以原点为顶点，而且包含三根坐标轴，求此锥面方程。

解 既然锥面包含三根坐标轴，则点（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1）必在这个锥面上。过这三点作一个平面，不难看出，它与圆锥的交线为圆

$$C: \left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

显然，这是所求圆锥面的一条准线。

设 $M(x,y,z)$ 是锥面上的任意一点，联结 OM 的直母线与准线 C 的交点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，因此，直母线方程为

$$x_0=tx,\quad y_0=ty,\quad z_0=tz$$

因 (x_0,y_0,z_0) 在 C 上，所以它满足准线方程

$$\left.\begin{array}{r} (tx)^2+(ty)^2+(tz)^2=1 \\ tx+ty+tz=1 \end{array}\right\}$$

消去 t，得

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$$

或

$$xy+yz+zx=0$$

这就是所求的锥面方程。

§11 直 纹 面

在我们研究过的二次曲面中，有的是由直线移动构成的，如锥面和柱面。由直线移动构成的曲面叫做**直纹面**，在曲面上的直线叫做**直母线**。在二次曲面中，除锥面和柱面外，还有哪

些曲面是直纹面呢？为了回答这个问题，我们来证明如下定理。

定理　**在椭圆面、双曲面和抛物面中，只有单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面。**

我们分两种情况来证明。

1°　先讨论椭圆面和双曲面的情形。

设

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1 \tag{1}$$

表示椭圆面和双曲面（单叶和双叶）的方程，系数 A,B,C 是非零实数。用

$$x=a+lt,\ y=b+mt,\ z=c+nt \tag{2}$$

表示过点 (a,b,c) 的直线。如果曲面（1）含有（2）式确定的直线，则直线上点的坐标 x,y,z 必满足方程（1），即

$$A(a+lt)^2+B(b+mt)^2+C(c+nt)^2=1$$

或

$$(Al^2+Bm^2+Cn^2)t^2+2(Aal+Bbm+Ccn)t+Aa^2$$
$$+Bb^2+Cc^2-1=0$$

由于直线在曲面上，所以这个等式应当对于任意的 t 成立，因而

$$Al^2+Bm^2+Cn^2=0 \tag{3}$$

$$Aal+Bbm+Ccn=0 \tag{4}$$

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2-1=0 \tag{5}$$

等式（5）表示点 (a,b,c) 在曲面上的必要充分条件；等式（3）和（4）表示直线（2）含于曲面（1）时的方向向量坐标 l,m,n 的比。

从等式（5）可以看出，a,b,c 不能同时等于零，不妨假定$a\neq0$。这时，从等式（4）得到

$$l=-\frac{Bbm+Ccn}{Aa}$$

显然，m,n 不能同时为零。把 l 的表示式代入等式（3），

则得

$$(ABa^2+B^2b^2)m^2-2BCbcmn+(ACa^2+C^2c^2)n^2=0$$

或

$$(ABa^2+B^2b^2)\left(\frac{m}{n}\right)^2+2BCbc\left(\frac{m}{n}\right)+(ACa^2+C^2c^2)=0$$

因为 m 比 n 是实数，所以判别式为

$$B^2C^2b^2c^2-(ABa^2+B^2b^2)(ACa^2+C^2c^2)\geqslant 0$$

也就是

$$-ABCa^2(Aa^2+Bb^2+Cc^2)\geqslant 0$$

由等式（5），则得

$$-ABCa^2\geqslant 0$$

因为 $a\neq 0$，所以

$$ABC\leqslant 0 \qquad (6)$$

容易看出，在 $b\neq 0$，$c\neq 0$ 的条件下，也可同样得到关系式（6）。

但从方程（1）可以看出，A,B,C任何一个都不能为零，而且它们又不能同时是负数。因此，关系式（6）中的A,B,C只能一个是负数，另两个是正数。因而，方程（1）只能是单叶双曲面的方程。也就是在椭圆面、单叶双曲面和双叶双曲面中，只有单叶双曲面是直纹面。

2° 现在讨论抛物面的情形。

设

$$Ax^2+By^2=2z \qquad (7)$$

表示椭圆抛物面和双曲抛物面的方程。系数 A,B 是正的或负的实数。

如果曲面（7）含有直线（2），则（2）中的x,y,z必满足（7），将（2）代入（7），则得

$$A(a+lt)^2+B(b+mt)^2-2(c+nt)=0$$

或

$$(Al^2+Bm^2)t^2+2(Aal+Bbm-n)t+Aa^2+Bb^2-2c=0$$

由于直线在曲面上，所以这个式子对于任意的 t 成立，因而有

$$Al^2 + Bm^2 = 0 \tag{8}$$

$$Aal + Bbm = n \tag{9}$$

$$Aa^2 + Bb^2 = 2c \tag{10}$$

等式（10）表示点 (a, b, c) 在曲面上的必要充分条件；等式（8）和（9）表示直线（2）含于曲面（7）时的方向向量坐标 l, m, n 的比。

从等式（9）可以看出，l 和 m 不能同时等于零。由方程（7）可知，A, B 任何一个都不等于零。由等式（8）可知，A, B 的符号必须相反。因此，方程（7）只能是双曲抛物面的方程。也就是在椭圆抛物面和双曲抛物面中，只有双曲抛物面是直纹面。

总之，在二次曲面中，只有二次柱面、二次锥面、单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面，而且只限于这四种。但我们将看到单叶双曲面和双曲抛物面与锥面、柱面不同的是，在它们上面经过每一点有两条面不是一条直母线。

下面，我们来分别研究单叶双曲面和双曲抛物面直母线的性质。

1　单叶双曲面的直母线

设单叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

把它变形为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

或改写为

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{2}$$

再作方程组

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

其中 α 和 β 是不同时等于零的任意实数．如果能确定 α 和 β 的一组值，则方程组（3）确定一条线．若任取 α 和 β 的值，则得到含有无穷多条直线的一组直线．因为方程组（3）两个方程等号两边对应相乘，便得到方程（2），也就是方程（1）．因此，若某一点的坐标满足方程组(3)的两个方程，则它也必满足方程（1）．于是，对于任意的 α 和 β，方程组（3）所确定的直线上的每个点，都在已知单叶双曲面上，也就是这一组直线完全在单叶双曲面上．

同样可以证明，方程

$$\left.\begin{aligned}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

对任意的不同时等于零的 λ 和 μ，也确定一组直线．而且这组直线也全在单叶双曲面上．

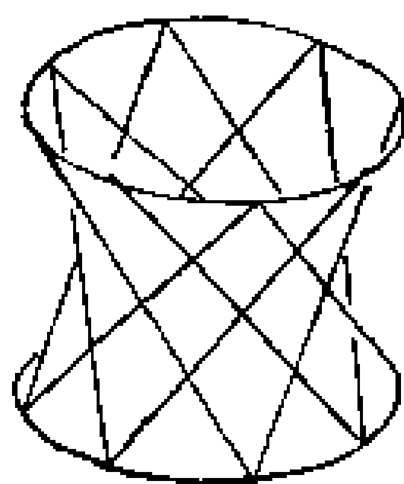


图 101

很明显，方程组（3）和（4）所确定的两组直线是不同的．我们把（3）和（4）两组直线分别叫做已知单叶双曲面的第一组直母线和第二组直母线（图101）．

现在，我们来证明单叶双曲面直母线的一个重要性质：**通过单叶双曲面上的每个点，都有两条直母线．其中一条属于第一组，另一条属于第二组．**

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是单叶双曲面上的任意一点，它的坐标必满足单叶双曲面的方程．因此

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right) \tag{5}$$

我们先在第一组直母线（3）中，确定通过点 M_0 的直线。为此，可利用方程组（3）求出 α 和 β：

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y_0}{b}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

如果 $1+\frac{y_0}{b}\neq 0$，则从第一个方程可得 $\beta=k\alpha\,(\alpha\neq 0)$，即

$$k=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}} \tag{7}$$

把 k 代入方程组（3），则得两个确定的方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=1-\frac{y}{b}\end{aligned}\right\}$$

它确定一条直线，通过点M_0。

如果 $1+\frac{y_0}{b}=0$，则公式（7）无意义。但当$1+\frac{y_0}{b}=0$时，必有 $1-\frac{y_0}{b}\neq 0$ 。这时可从（6）式的第二个方程求出 k 值。同样可得，方程组（3）中的一条直线通过点M_0。

因此，证明了通过单叶双曲面上的任意一点 M_0 有唯一的一条直线，并且它属于第一组直母线。利用方程组（4），同样可以证明，通过点 M_0 还有唯一一条直线，并且它属于第二组直母线。

由上述讨论可知，（3），（4）两组直母线都在单叶双

曲面上；通过单叶双曲面上的每个点，都有两条直母线，它们分别属于（3），（4）直母线组。因此，（3）与（4）直母线组，每一组都全部覆盖在单叶双曲面上。正因为如此，有时也把单叶双曲面叫做**线织面**。

下面，我们来证明单叶双曲面的另一个重要性质：**同族的三条直母线不平行于同一平面。**

从（3）式可以得出直母线的方向向量为

$$\left\{\frac{1}{bc}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right),\ \frac{2}{ac},\ \frac{1}{ab}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$$

若使$\frac{\beta}{\alpha}=u$，则上式可改写为

$$\left\{\frac{1}{bc}\left(u-\frac{1}{u}\right),\ \frac{2}{ac},\ \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{u}+u\right)\right\}$$

如果取不同的三个参数 u_1, u_2, u_3 对应于三条不同的直母线，那末从

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{bc}\left(u_1-\frac{1}{u_1}\right) & \frac{2}{ac} & \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{u_1}+u_1\right) \\ \frac{1}{bc}\left(u_2-\frac{1}{u_2}\right) & \frac{2}{ac} & \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{u_2}+u_2\right) \\ \frac{1}{bc}\left(u_3-\frac{1}{u_3}\right) & \frac{2}{ac} & \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{u_3}+u_3\right) \end{vmatrix} = \frac{2}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \frac{1}{u_1} \\ u_2 & 1 & \frac{1}{u_2} \\ u_3 & 1 & \frac{1}{u_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \frac{1}{u_1} \\ u_2-u_3 & 0 & \frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3} \\ u_3-u_1 & 0 & \frac{1}{u_3}-\frac{1}{u_1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2(u_1-u_2)(u_2-u_3)(u_3-u_1)}{a^2b^2c^2u_1u_2u_3} \neq 0$$

由此可知，同族的三条直母线不平行于同一平面。

2　双曲抛物面的直母线

设双曲抛物面的标准方程为

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \tag{1}$$

为了书写运算方便，可令 $p=a^2$, $q=b^2$, 则方程（1）可改为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \tag{2}$$

把方程（2）变形为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z \tag{3}$$

再作方程组

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=\beta\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=2\alpha z\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 α 和 β 是不同时等于零的任意实数。若确定 α 和 β 的值，则方程组（4）确定一条直线；若变动 α和 β 的值，则得无穷多条直线的直线组。与单叶双曲面的情形同样可以证明，这一组直线完全在双曲抛物面上。

同理，方程组

$$\left.\begin{aligned}\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=\mu\\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2\lambda z\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

对于任意不同时等于零的 λ 和 μ 确定一个直线组，并且这组直线也完全在已知双曲抛物面上。

不难看出，方程组（4）与（5）所确定的两组直线是不同的。我们把（4），（5）两组直线分别叫做已知双曲抛物面的第一组直母线和第二组直母线（图102）。

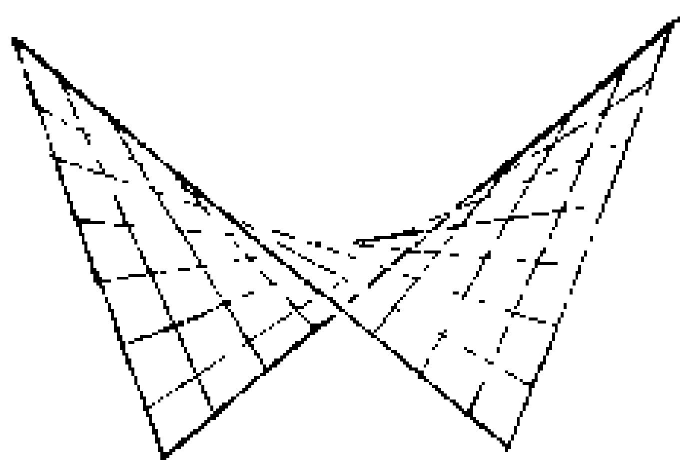


图 102

现在，我们来证明双曲抛物面直母线的一个重要性质：通过双曲抛物面上的每个点，都有两条直母线，其中一条属于第一组，另一条属于第二组。

设$M_0(x_0, y_0, z_0)$是双曲抛物面上的任意一点，它的坐标必满足双曲抛物面的方程。因此，

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)=2z_0 \qquad (6)$$

我们先在第一组直母线（4）中，确定通过点M_0的直线。为此，可利用方程（4）求 α 和 β：

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)&=\beta\\ \beta\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)&=2\alpha z_0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

从其中第一个方程，可得 $\beta=k\alpha$ $(\alpha\neq 0)$

$$k=\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b} \qquad (8)$$

把 $\beta=k\alpha$ 代入方程组（4），则得两个确定的方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=k\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=2z\end{aligned}\right\}$$

它确定一条直线，这条直线通过点M_0。

因此，证明了通过双曲抛物面上的任意一点M_0有唯一的一条直线，并且它属于第一组直母线。利用方程组（5），同样可以证明，通过点M_0还有唯一一条直线，并且它属于第二组直母线。

由上述讨论可知，（4），（5）两组直母线都在双曲抛物面上；通过双曲抛物面上的每个点，都有两条直母线，它们分别属于（4），（5）直母线组．因此，（4）与（5）直母线组，每一组都全部覆盖在双曲抛物面上．正因为如此，有时也把双曲抛物面叫做线织面．

下面，我们来证明双曲抛物面的另一个重要性质：**同族的所有直母线平行于同一平面．**

如果令$\frac{\beta}{\alpha}=u$，则直母线族（4）可写为

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{u}\end{array}\right\} \qquad (4')$$

从第一式可以看出，对于一切u值，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u$ 都平行于平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$，因面直母线族（$4'$）每条直母线也都平行于平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$．

同理可证，另一组直母线（5）都平行于平面$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$．

单叶双曲面和双曲抛物面，除了前边讲过的性质外，它们还有两条共同性质：

1° 同组的每两条直母线不共面，即它们是异面直线；

2° 异组的每两条直母线共面，即它们在同一个平面上．

这两个性质，在此不想一一证明，读者可作为练习去做．

例 已知单叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$$

验证点$M_0(3,2,1)$在曲面上，并求通过点 M_0 的两条直母线．

解　由于点 M_0 的坐标满足已知方程，所以点 M_0 在曲面上。

把单叶双曲面的方程写成

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1-\frac{y}{2}\right)$$

因此，两组直母线的方程为

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{2}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{1}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right)&=\mu\left(1-\frac{y}{2}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right)&=\lambda\left(1+\frac{y}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

把已知 M_0 点的坐标代入这两个方程中，则得

$$\alpha=\beta \quad 和 \quad \lambda=0$$

因而，过点 M_0 的两条直母线为

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-6z-6&=0\\ 2x-3y+6z-6&=0\end{aligned}\right\}$$

和

$$\left.\begin{aligned}x-3z&=0\\ y-2&=0\end{aligned}\right\}$$

习　　题

1．验证下列各点：$A(1,-2,-1)$，$B(-8,-2,2)$，$C(3,1,-2)$，是否在曲面 $x^2+y^2+z^2+4x-8y-10z-36=0$ 上。

2．试求经过三点 $A(3,1,-3)$，$B(-2,4,1)$，$C(-5,0,0)$，且中心在平面 $2x+y-z+3=0$ 上的球面方程。

3．试求与三个坐标面相切，且通过点 $M(1,2,-5)$ 的球面方程。

4．试求经过点 $A(1,5,-3)$ 和 $B(-3,0,0)$，且球心在直线 $\begin{cases}3x-y-2z=0\\x+2y-4=0\end{cases}$ 上的球面方程。

5．试证：过球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切面方程为 $xx_0+yy_0+zz_0=r^2$（注：过球面上点 M_0 的切面定义为通过点 M_0 的所有切线的集合）．

6．试求与球面 $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$ 切于点 $M_0(1,6,-5)$ 的切平面方程。

7．试求满足下列条件的动点的轨迹方程。

（1）一动点 $M(x,y,z)$ 的三个坐标之和等于它到坐标原点距离的代数值；

（2）一动点 $M(x,y,z)$ 到 Ox 轴与 Oy 轴距离的平方差为常数 a；

（3）一动点 $M(x,y,z)$ 到 Ox 轴与 Oy 轴距离之比为常数 a；

（4）一动点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离等于它到平面 $z-4=0$ 的距离。

8．已知在 Oxy 平面上的下列曲线，若在空间直角坐标系中，它们表示什么图形。

（1）$x^2+y^2=1$；　（2）$x^2=2y$；　（3）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$；

（4）$3x^2+y^2=0$；　（5）$(x^2+y^2)(2x-y+1)=0$。

9．已知等腰三角形两底角的顶点坐标为 $A(4,5,6)$ 和 $B(-2,-1,2)$，试求另一顶点的轨迹。

10．试确定下列方程组代表什么曲线。

（1）$\begin{cases}y+2=0\\z-5=0\end{cases}$；　（2）$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\z=0\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}x^2+2y^2+4z^2=36\\y=0\end{cases}$；　（4）$\begin{cases}x^2+y^2=18\\x-y=0\end{cases}$。

11．把下列曲线方程化为两个曲面表示的方程。

（1）$\begin{cases}x=(t+1)^2\\y=2(t+1)^2\\z=-(2t+1)\end{cases}$；　（2）$\begin{cases}x=3\sin t\\y=4\cos t\\z=4\sin t\end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = \text{[illegible]}; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{1 - t^2} \\ y = 2t^2 \\ z = 2t. \end{cases}$

12．试求下列曲线的参数方程．

（1）$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \ (a>0). \end{cases}$

13．设曲线方程为 $\begin{cases} 2y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0, \\ y^2 + 3z^2 - 8x - 12z = 0 \end{cases}$ 试把此曲线用母线平行于 Ox 轴和 Oy 轴的柱面方程表示出来．

14．试证：曲面 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ 与平面 $x = 2$ 交成一椭圆．并求此椭圆的半轴和顶点坐标．

15．试求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ 在 Oxy 坐标面上的投影曲线．

16．试在曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 25 \end{cases}$ 上求一点M，使得点 M 的横坐标$x = 3$．

17．一平面 $x + y + 2z - 1 = 0$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 交成一圆，试求此圆的中心和半径．

18．试证：曲线 $x = 3\sin t$，$y = 4\sin t$，$z = \cos t$ 在曲面 $5x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3 = 0$ 上．

19．下列曲面方程，哪些是旋转曲面方程，它们是怎样产生的．

（1）$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$；　（2）$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$；

（3）$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$；（4）$x^2 - y^2 - z^2 = 1$；

（5）$x^2 + y^2 + z^2 = 1$；　（6）$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$．

20．试求满足下列条件的旋转曲面方程．

（1）母线为 $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ z = 0, \end{cases}$ 旋转轴为 Ox 轴；

（2）母线为 $\begin{cases} 2x = 1 \\ 2z = \sqrt{3}, \end{cases}$ 旋转轴为 Oy 轴．

（3）母线为 $\begin{cases} xz = 8 \\ y = 0, \end{cases}$ 旋转轴为 Oz 轴；

（4）母线为 $\begin{cases} z = \operatorname{tg} x \\ y = 0, \end{cases}$ 旋转轴为 Ox 轴。

21．试证：到坐标原点的距离等于到 Oz 轴距离2倍的动点轨迹是一旋转曲面。

22．已知一动点 $M(x,y,z)$ 到两定点 D_1, D_2 的距离之和为 $2a$，试证此动点轨迹是一旋转曲面。

23．一动点到定点 $P(1,0,0)$ 的距离等于它到平面 $x=4$ 的距离的一半，试证此动点轨迹是一旋转椭圆面。

24．试求曲线 $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{2} - z^2 = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 绕坐标轴旋转的曲面方程。

25．设椭圆面 $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ 经伸缩变换后为 $\dfrac{X^2}{36} + \dfrac{Y^2}{16} + \dfrac{Z^2}{9} = 1$，试求此伸缩变换式。

26．试求由曲线 $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 Ox 轴旋转后作伸缩变换：$x' = \dfrac{2}{3}X$，$y' = Y$，$z' = \dfrac{4}{3}Z$ 所形成的曲面方程。

27．以动平面 $z=h$ 截椭圆面 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$，得到一组相似椭圆，试求这组椭圆的焦点轨迹。

28．已知一椭圆面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(c < a < b)$，试求通过 Ox 轴且与此椭圆的交线是圆的平面方程。

29．由椭圆面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的中心，沿方向余弦为 λ, μ, ν 的方向引一射线交椭圆面于点 P，设 $|\overrightarrow{OP}| = r$，试证：

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}.$$

30．由椭圆面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的中心引三条两两垂直的射线，分

别交椭圆面于点 P, Q, R. 设 $|\overrightarrow{OP}| = r_1$, $|\overrightarrow{OQ}| = r_2$, $|\overrightarrow{OR}| = r_3$, 试证：

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

31. 试证：由参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta \\ y = b\cos\varphi\sin\theta \\ z = c\sin\varphi \end{cases}$ 确定的曲面是椭圆面

(φ, θ 为参数，a, b, c 为常数)。

32. 已知单叶双曲面方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, 试求分别平行于 Oxy 坐标面和 Oyz 坐标面，且与曲面的交线都是一对相交直线的两个平面方程。

33. 试确定 m 为何值时，平面 $x + mz - 1 = 0$ 与单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 相交成：（1）椭圆，（2）双曲线。

34. 一组平行平面 $y = h$ 截单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 得一组双曲线，试求这些双曲线顶点的轨迹。

35. 一动直线沿三条直线 p_1: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$, p_2: $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, p_3: $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$ 滑动，试求动直线的轨迹方程。

36. 已知单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, 试求通过 Oy 轴且与曲面的交线是二平行直线的平面方程。

37. 已知二次曲面方程为 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$, 且通过点 $A(0, 0, 4)$, $B(1, 0, 2\sqrt{5})$ 和 $C(1, 1, 2\sqrt{12})$, 试求此曲面方程。

38. 试求通过点 $(6, 2, 8)$ 且完全在单叶双曲面 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ 上的直线方程。

39. 一动点到两定点 C_1, C_2 的距离之差等于 $2a$, 试证此动点轨迹是双叶双曲面。

40. 已知抛物线 $\begin{cases} x^2 = 4(z-1) \\ y = 5 \end{cases}$ 平行移动且顶点在抛物线

$\begin{cases}(y-2)^2=9z\\ x=0\end{cases}$ 上，试求其轨迹方程。

41．试求抛物线 $\begin{cases}(y-1)^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕其对称轴旋转，然后作伸缩变换：$X=2X'$，$Y=Y'$，$Z=Z'$ 所形成的椭圆抛物面方程。

42．已知椭圆抛物面 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=2z$ 和平面 $x=kz$（$k<0$）的交线是一圆，试求此圆的半径。

43．已知椭圆抛物面 $Ax^2+By^2=2z$ 通过圆 $\begin{cases}x=z\\ x^2+y^2+z^2=2x+2z,\end{cases}$ 试求其方程。

44．已知一抛物线 $\begin{cases}x^2=2z\\ y=0\end{cases}$ 平行移动且顶点在抛物线 $\begin{cases}y^2=-4z\\ x=0\end{cases}$ 上，试求其轨迹方程。

45．试证：与直线 $\dfrac{x-p}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$ 和平面 $x+p=0$ 等距的点的轨迹是一抛物柱面。

46．试求与二直线 $\begin{cases}y=0\\ z=1,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=0\\ z=-1\end{cases}$ 相切的球心轨迹方程。

47．试求与二直线 p：$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 和 q：$\begin{cases}x=1\\ z=0\end{cases}$ 相交，且与平面 $x+y+z=0$ 平行的动直线轨迹方程。

48．试求下列柱面方程

（1）准线为 $\begin{cases}y^2=2z\\ x=0,\end{cases}$ 母线平行于 Ox 轴；

（2）准线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1\\ y=3,\end{cases}$ 母线平行于 Oy 轴。

（3）准线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ z=2,\end{cases}$ 母线平行于 Oz 轴；

49．已知柱面的准线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$，母线平行于直线 $x=y=z$，试求此柱面方程。

50．一柱面的母线平行于直线 $x=t$，$y=2$，$z=t$，且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切，试求此柱面方程。

51．已知一圆柱面的半径 $r=2$，它的轴线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{2}$，试求此柱面方程。

52．试求母线平行于直线 $x=y=z$，且与椭圆面 $x^2+4y^2+4z^2=1$ 相切的柱面方程。

53．试求通过三条直线 p_1：$\begin{cases}x=0\\y-z=0,\end{cases}$ p_2：$\begin{cases}x=0\\x+y-z=-2,\end{cases}$ p_3：$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程。

54．试求顶点在坐标原点，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\x^2+y^2+z^2=25\end{cases}$ 的锥面方程。

55．试求直线 $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{2}$ 绕 Oz 轴旋转的锥面方程。

56．试证：顶点在坐标原点，准线方程为 $\begin{cases}f(x,y)=0\\z=h\end{cases}$ 的锥面方程为 $f\left(\frac{hX}{Z},\ \frac{hY}{Z}\right)=0$。

57．试证：与 Oyz 坐标面构成 $\frac{\pi}{4}$ 角且通过坐标原点的直线轨迹是一等轴锥面。

58．试求通过点 $(-2,0,0)$ 和 $(0,-2,0)$ 且与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 交成抛物线的平面方程。

59．试求顶点为 $(1,1,1)$，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$ 的锥面方程。

60．在单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上，求过点 $M(1,1,1)$ 的直母线方程。

61．在双曲抛物面 $4x^2 - z^2 = y$ 上，求过点$M(1,3,-1)$的直母线方程。

62．已知直纹面的一组直母线方程为 $\begin{cases} x + 2z + k(y-1) = 0 \\ k(x-2z) + y + 1 = 0, \end{cases}$ 试求其直纹面方程。

63．在双曲抛物面 $x^2 - y^2 = 2z$ 上，试求平行于平面 $x + y + z = 0$的直母线方程。

64．试证：直线 $\begin{cases} 3x + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} = 0 \\ x + 2z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$ 在单叶双曲面 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ 上。

65．在直纹面 $2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy + xz - 6z = 0$ 上，试求过点$M(1,1,1)$的直母线方程。

66．试证：若双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 的直母线垂直相交，则交点必在某一双曲线上，并写出其方程。

67．试证：单叶双曲面异组的两条直母线共面。

68．试证：双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 同组的两条直母线不共面。

第五章　二次曲面的一般理论

在第四章中，我们已经研究了三元二次方程的一些特殊情形以及这些方程所确定的二次曲面．在这一章中，我们要研究二次曲面的一般理论，也就是要从一般三元二次方程来研究二次曲面的问题．

坐标满足方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x$$
$$+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (*)$$

的点的集合叫做二次曲面．方程(*)叫做二次曲面的一般方程．

这里，实系数 a_{ik} $(i\neq k)$ 有时写成 a_{ki}，也就是

$$a_{ik}=a_{ki}$$

系数 a_{ik} 可取任何实数值．但，当 $i,k=1,2,3$ 时，a_{ik} 不能同时等于零、即二次项系数不能同时为零．

在二次曲面的一般理论的研究中，我们主要解决如下两个基本问题：

1）已知一般方程(*)，如何把它化简为标准方程；

2）已知一般方程(*)，如何确定它所表示的二次曲面的形状．

在此基础上，将二次曲面加以分类．

为此，我们先来研究坐标变换．

§1　坐标变换

1　平移变换

所谓平移变换，就是只改变坐标原点的位置，而坐标轴的方向和测度单位都保持不变的一种变换。

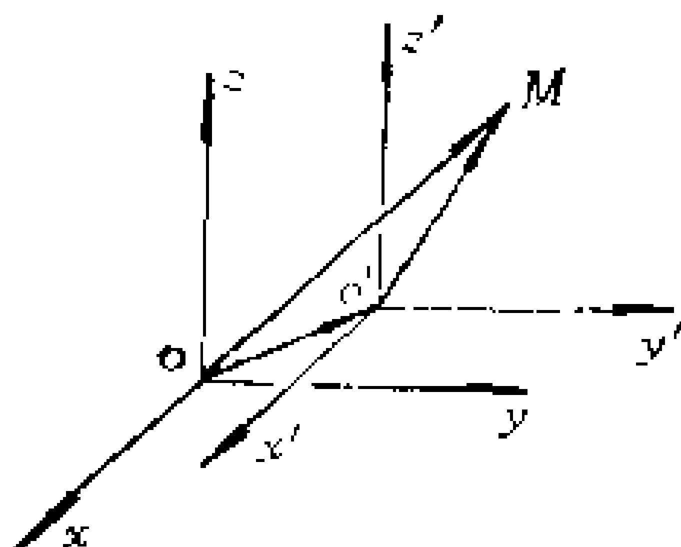


图 103

设 Ox, Oy, Oz 是旧坐标轴，$O'x', O'y', O'z'$是新坐标轴（图 103）．新轴对于旧坐标系的位置是由新原点的旧坐标 $O'(a, b, c)$确定的。

设空间任意点 M，它对于旧坐标系的坐标为 x, y, z．而对于新坐标系的坐标为 x', y', z'，我们的目的是确定用 x', y', z' 表示 x, y, z 或用 x, y, z 表示 x', y', z' 的变换公式．为此，我们利用向量等式

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M} \qquad (1)$$

向量$\overrightarrow{OM}$是点M在旧坐标系中的径向量，所以向量$\overrightarrow{OM}$的坐标就是点M的坐标，因此，$\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$．同理，$\overrightarrow{OO'}=\{a, b, c\}$．向量$\overrightarrow{O'M}$是点$M$在新坐标系中的径向量，所以

$$\overrightarrow{O'M}=\{x', y', z'\}$$

根据等式（1），即得

$$\left.\begin{aligned} x&=x'+a\\ y&=y'+b\\ z&=z'+c \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

这就是我们所求的平移变换公式。

要想得到用点M的旧坐标 x, y, z 表示新坐标 x', y', z' 的变换公式，从公式（2）很容易求得

$$\left.\begin{aligned} x'&=x-a\\ y'&=y-b\\ z'&=z-c \end{aligned}\right\}$$

这里，$-a, -b, -c$，是旧坐标原点在新坐标中的坐标。

2 旋转变换

所谓旋转变换，就是只改变坐标轴的方向，而坐标轴的垂直关系，坐标原点的位置和测度单位都保持不变的一种变换。

设 Ox, Oy, Oz 是旧坐标轴，Ox', Oy', Oz'是新坐标轴（图104）。为了书写方便，今后用$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$表示旧坐标系的基本向量，用$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$表示新坐标系的基本向量。我们假定每一个新坐标轴和每一个旧坐标轴所组成的角是已知的，我们用下表来表示这些角。

	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1'}$	α_1	β_1	γ_1
$\vec{e_2'}$	α_2	β_2	γ_2
$\vec{e_3'}$	α_3	β_3	γ_3

（3）

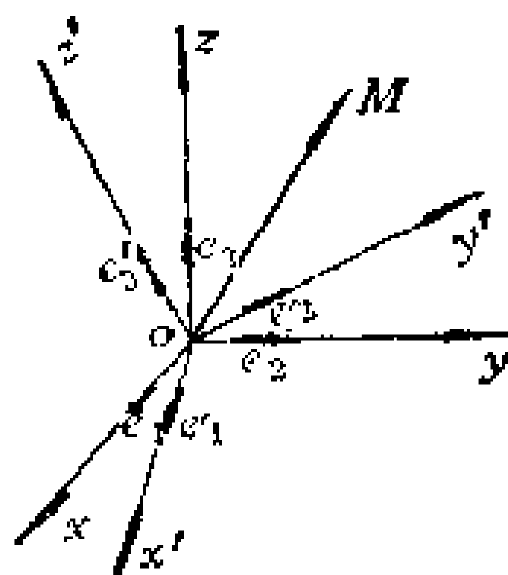


图 104

现在按基本向量$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$来分解向量$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$。因为$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}, \vec{e_3'}$是单位向量，应用表（3），则得

$$\left.\begin{aligned}\vec{e_1'} &= \cos\alpha_1\ \vec{e_1} + \cos\beta_1\ \vec{e_2} + \cos\gamma_1\ \vec{e_3}\\ \vec{e_2'} &= \cos\alpha_2\ \vec{e_1} + \cos\beta_2\ \vec{e_2} + \cos\gamma_2\ \vec{e_3}\\ \vec{e_3'} &= \cos\alpha_3\ \vec{e_1} + \cos\beta_3\ \vec{e_2} + \cos\gamma_3\ \vec{e_3}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

设空间任意点 M，它对于旧坐标系的坐标为 x, y, z，而对新坐标系的坐标为 x'，y'，z'。我们的目的是确定用 x'，y'，z' 表示 x, y, z 或用 x, y, z 表示 x', y', z' 的变换公式。

我们把向量$\overrightarrow{OM}$，先按基本向量 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$分解，然后再按基

本向量$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$分解，则得

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{OM}=x'\vec{e_1'}+y'\vec{e_2'}+z'\vec{e_3'} \tag{6}$$

由等式（5）和（6），便得

$$x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}=x'\vec{e_1'}+y'\vec{e_2'}+z'\vec{e_3'}$$

再用（4）式代换向量$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$，就得到

$$\begin{aligned}x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}=&x'(\cos\alpha_1\vec{e_1}+\cos\beta_1\vec{e_2}+\cos\gamma_1\vec{e_3})\\&+y'(\cos\alpha_2\vec{e_1}+\cos\beta_2\vec{e_2}+\cos\gamma_2\vec{e_3})\\&+z'(\cos\alpha_3\vec{e_1}+\cos\beta_3\vec{e_2}+\cos\gamma_3\vec{e_3})\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}=&(x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3)\vec{e_1}\\&+(x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3)\vec{e_2}\\&+(x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3)\vec{e_3}.\end{aligned}$$

由向量分解的唯一性，则得

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3\\y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3\\z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这就是我们所求的用新坐标表示旧坐标的旋转变换公式。

若用点M的旧坐标表示它的新坐标 x'，y'，z' 的变换公式，只要把新轴看作旧轴，旧轴看作新轴，应用公式（7）与表（3），适当变换方向余弦就得到

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1\\y'&=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2\\z'&=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3\end{aligned}\right\}$$

表（3）中的九个角以及它们的余弦之间是有一定的关系的。下面，我们来讨论这个问题。

1° 新坐标系的每个坐标轴 Ox', Oy', Oz' 对旧坐标轴的方向余弦的平方和等于1，因此得出如下三个关系式

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1\\ \cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1\\ \cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1\end{array}\right\}\qquad(8)$$

2° 因为三个轴 Ox', Oy', Oz' 互相垂直，所以，有

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0\\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0\\ \cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0\end{array}\right\}\qquad(9)$$

3° 九个方向余弦组成的变换行列式等于1．即

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}=1\qquad(10)$$

这是因为 $\Delta=\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$，而向量组 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ 还是右旋的，所以这个混合积是以 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 为棱的单位立方体的体积，因而等于1．

不难看出，旧坐标系的三个轴 Ox, Oy, Oz 对新坐标系也有类似于（8），（9），（10）的三个关系式。

1° 说明一个轴的三个方向角不是任意给定的，它们必须合于关系式（8）．

2° 中的关系式（9）可以用来判定三个轴或三个单位向量是否具有互相垂直的关系。

3° 可以用来判定三个轴或三个单位向量所组成的方向是右旋的还是左旋的。当 $\Delta=1$ 时，是右旋的，当 $\Delta=-1$ 时是左旋的。

3 一般变换

所谓一般变换，就是改变坐标原点的位置和坐标轴的方向，但坐标轴的垂直关系和测度单位保持不变的一种变换。

我们假设新原点的旧坐标 $O'(a, b, c)$ 以及每个新轴与旧轴间的角都是已知的，仍用表（3）来表示这些角。

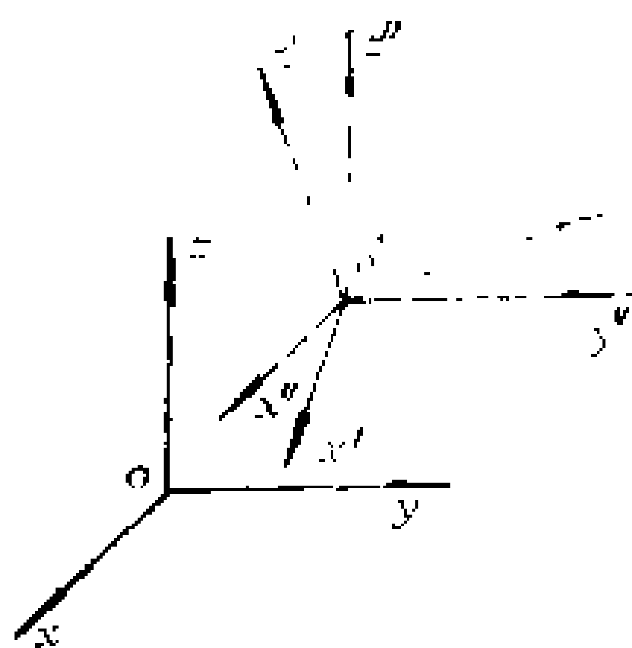


图 105

设M是空间的任一点，用 x, y, z 表示点M的旧坐标，用x', y', z'表示点M的新坐标。我们的目的是想得到用 x', y', z' 表示 x, y, z 或用 x, y, z 表示 x', y', z'的变换式。

为此，我们引用一个辅助坐标系，使其轴的方向与旧坐标系的轴的方向一致，而它的坐标原点与新坐标系的原点重合（图105）。并用 x'', y'', z'' 表示点M对关于辅助坐标系的坐标。

因为辅助坐标系的轴可由旧坐标轴的平行移动得到，所以，有

$$x = x'' + a,\quad y = y'' + b,\quad z = z'' + c.$$

又因为新坐标系与辅助坐标系有一个共同的坐标原点，所以，有

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y'' &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z'' &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}$$

把 x'', y'', z'' 代入上等式右边，即得

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + a \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + b \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + c \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

这就是我们所要求的一般变换公式。

若用旧坐标表示新坐标的变换公式，则有

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 + a' \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 + b' \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 + c' \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

这里，a', b', c' 是旧坐标系原点关于新坐标系的坐标。

4　曲面的代数性和超越性以及代数曲面的次数，都与所取直角坐标系的位置无关

我们已知，代数方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的曲面是代数曲面．当坐标变换时，曲面上每个点的坐标应按一般变换公式（11）变换．所以，要求曲面在新坐标系中的方程，必须按一般变换公式（11）把曲面的原方程中 x,y,z 加以变换．但原方程的左边 $F(x,y,z)$ 是关于x,y,z的多项式，按公式（11）变换 x,y,z 后，显然仍变为一个关于 x'，y'，z' 的多项式．因此，代数方程仍变为代数方程．由此可以断定，超越方程按公式（11）变换后，仍变为超越方程．这是因为，如果超越方程能变为代数方程，则逆变换将把代数方程变为超越方程．这与代数方程仍变为代数方程的结论矛盾．因此，曲面的代数性与超越性与坐标系的取法无关．

代数曲面的次数也与坐标系的选取无关．因为一般变换公式（11）是一次的代数式，用它代入 $F(x,y,z)$，则有

$$F(x,y,z)=F'(x',\ y',\ z').$$

如果 n 是 $F(x,y,z)$ 的次数，那么多项式 $F'(x',\ y',\ z')$ 的次数 n' 和 n 有如下关系

$$n\geqslant n'.$$

也就是 $F(x,y,z)$ 变换后的次数不会增高．反之，（11）的逆变换式（12）也是一个一次的代数式，把它代入 $F'(x',y',z')$，自然又回到 $F(x,y,z)$，它们之间的次数必有如下关系

$$n'\geqslant n.$$

也就是 $F(x,y,z)$ 变换后的次数不会降低．由此，得出$n=n'$，这就是说，代数曲面的次数经过坐标变换是不变的．

由此看出，曲面的代数性和超越性以及代数曲面的次数，都是曲面的固有性质，不会因坐标系的变换面改变．但通过坐标变换，可使曲面的一般方程由繁化简．

此外，坐标变换对于数学的其它学科以及物理、力学等方面也有广泛的应用．

例 在直角坐标系中，已知新坐标系的原点为$O'(3, 2, 4)$，点$M'(6, 8, -2)$属于新坐标轴$O'x'$，点$N'(10, -2, -1)$属于新坐标平面$O'x'y'$，而且已知，对点M'来说$x'>0$，对点N'来说$y'>0$。试写出坐标系$Oxyz$到$O'x'y'z'$的变换公式。

解 由题设可知，向量$\overrightarrow{O'M'}=\{3, 6, -6\}$。因为，对于点$M'$，$x'>0$，所以

$$\overrightarrow{e_1'}=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

又因，对于点N'，$y'>0$，所以

$$\overrightarrow{O'M'}\times\overrightarrow{O'N'} \text{ 和 } \overrightarrow{e_1'}\times\overrightarrow{e_2'}$$

的方向是相同的。
因面

$$\overrightarrow{e_3'}=\frac{\overrightarrow{O'M'}\times\overrightarrow{O'N'}}{|\overrightarrow{O'M'}\times\overrightarrow{O'N'}|}.$$

因为$\overrightarrow{O'M'}=\{3, 6, -6\}$，$\overrightarrow{O'N'}=\{7, -4, -5\}$，所以
$\overrightarrow{O'M'}\times\overrightarrow{O'N'}=\{-54, -27, -54\}$，因而

$$\overrightarrow{e_3'}=\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$$

显然

$$\overrightarrow{e_2'}=\overrightarrow{e_3'}\times\overrightarrow{e_1'}=\left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$$

又因$\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}\overrightarrow{e_3'}=1$，所以向量组$\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$，$\overrightarrow{e_3'}$是右旋的。这样一来，变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'+3 \\ y&=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'+2 \\ z&=-\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'+4 \end{aligned}\right\}$$

§2 用平移变换化简方程

在这一节中，我们要解决这样一个问题：确定一个新坐标系，使得已知曲面的方程在新坐标系中不含有坐标 x, y, z 的一次项。

设已知二次曲面的一般方程为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

现在把坐标轴平移，也就是把坐标原点移到某个点 $S(x_0, y_0, z_0)$。如果用 x, y, z 表示空间任意点的旧坐标，用x', y', z' 表示同一点的新坐标，则有

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0 \qquad (2)$$

若把方程（1）左边的流动坐标用（2）代换，则得

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'$$
$$+ 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})x' + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0$$
$$+ a_{23}z_0 + a_{24})y' + 2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})z'$$
$$+ (a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0$$
$$+ 2a_{23}y_0z_0 + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}) \qquad (3)$$

这里，$a_{12} = a_{21}$，$a_{13} = a_{31}$，$a_{23} = a_{32}$。容易看出，对于平移变换，二次项系数保持不变，而一次项的系数和常数项却要改变。若设

$$a_{14}' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}$$
$$a_{24}' = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}$$
$$a_{34}' = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}$$
$$a_{44}' = a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0$$
$$+ 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}.$$

则方程（1）就变成如下形式

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'$$
$$+ 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0 \qquad (3')$$

现在，我们要求出这样的点 S，使得变换后的方程（3）不含流动坐标的一次项．也就是，使 $a_{14}'=0, a_{24}'=0, a_{34}'=0$。为此，应使点 S 的坐标满足方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0\\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

若方程组（4）有解，则存在点 S，然后把坐标原点平移到点 S，则方程（3′）就变为如下形式

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z' +2a_{23}y'z'+a_{44}'=0 \qquad (5)$$

从方程（5），可得

$$a_{11}(-x')^2+a_{22}(-y')^2+a_{33}(-z')^2+2a_{12}(-x')(-y') +2a_{13}(-x')(-z')+2a_{23}(-y')(-z')+a_{44}'=0$$

成立．这就是说，若 $M(x', y', z')$ 点在已知曲面上，则点 $M'(-x', -y', -z')$ 也在这个曲面上．由此可知，已知曲面上的点关于新坐标原点 S 两两对称。

如果在空间存在一点，已知曲面上的点关于它两两对称，则这个点叫做**曲面中心**。

因此，使已知二次曲面的一般方程（1）变成方程（5）的坐标变换，就是把坐标原点移到已知曲面的中心。

由于方程组（4）的解，可以作为曲面的中心，所以方程组（4）也叫做**中心方程组**。

今后，我们把中心方程组（4）的行列式用 I_3 表示，即

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

因此，若 $I_3\neq 0$，则方程组（4）有唯一的一组解．这时，曲面只有一个中心．若 $I_3=0$，则方程组（4）或者没有解，或者有无穷多组解．这时，曲面或者没有中心，或者有无穷多个中心。

只有一个确定中心的二次曲面，我们叫做有心二次曲面。否则，叫无心二次曲面。

在有心二次曲面方程（5）中，常数项 a_{44}' 可以化简；因为

$$a_{44}'=(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})x_0+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24})y_0+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34})z_0+(a_{14}x_0+a_{24}y_0+a_{34}z_0+a_{44})。$$

由方程组（4），则得

$$a_{44}'=a_{14}x_0+a_{24}y_0+a_{34}z_0+a_{44}$$

例 已知方程 $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+18=0$，判定它是有心曲面，求出中心，并化简方程。

解 因为

$$I_3=\begin{vmatrix}7&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&5\end{vmatrix}=162\neq 0$$

所以，已知方程确定有心曲面。

写出中心方程组

$$\left.\begin{aligned}7x_0-2y_0-3=0\\-2x_0+6y_0-2z_0-12=0\\-2y_0+5z_0+9=0\end{aligned}\right\}$$

解之，得中心为 $S(1,2,-1)$。

作平移变换

$$\left.\begin{aligned}x=x'+1\\y=y'+2\\z=z'-1\end{aligned}\right\}$$

把坐标原点移到 S，则已知方程变为

$$7x'^2+6y'^2+5z'^2-4x'y'-4y'z'+a_{44}'=0$$

但， $a_{44}'=-3x_0-12y_0+9z_0+18=-18$

所以，已知方程化简为

$$7x'^2+6y'^2+5z'^2-4x'y'-4y'z'-18=0$$

§3 用旋转变换化简方程

在这一节中，我们要解决这样一个问题：确定一个新坐标系，使得已知曲面的方程在新坐标系中不含有 x, y, z 的乘积项。

设已知二次曲面的一般方程为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

若坐标系 $Oxyz$ 绕坐标原点旋转得到坐标系 $Ox'y'z'$，我们来求曲面方程（1）关于坐标系 $Ox'y'z'$ 的方程。

为了便于计算，把 §1 中的已知直角坐标系的旋转变换式（7）写成

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

这里的变换系数是新旧轴夹角的余弦，如表(*)。

	$\vec{e}_1{}'$	$\vec{e}_2{}'$	$\vec{e}_3{}'$
$\vec{e}_1$	$l_1 = \cos\alpha_1$	$l_2 = \cos\alpha_2$	$l_3 = \cos\alpha_3$
$\vec{e}_2$	$m_1 = \cos\beta_1$	$m_2 = \cos\beta_2$	$m_3 = \cos\beta_3$
$\vec{e}_3$	$n_1 = \cos\gamma_1$	$n_2 = \cos\gamma_2$	$n_3 = \cos\gamma_3$

(*)

由表(*)可以看出，基本向量的坐标分别为

$\vec{e}_1 = \{l_1,\ l_2,\ l_3\}$，　$\vec{e}_1{}' = \{l_1,\ m_1,\ n_1\}$，

$\vec{e}_2 = \{m_1,\ m_2,\ m_3\}$，　$\vec{e}_2{}' = \{l_2,\ m_2,\ n_2\}$，

$$\vec{e_2}' = \{n_1, n_2, n_3\}, \quad \vec{e_3}' = \{l_3, m_3, n_3\}.$$

而且这些坐标满足如下条件（即§1中的（8）、（9）、（10）三式的缩写）：

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$l_il_j + m_im_j + n_in_j = 0 \qquad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 1$$

这是因为 $(\vec{e_i}')^2 = 1$，$\vec{e_i}'\vec{e_j}' = 0$，$\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}' = 1$。

我们把公式（2）中的 x, y, z 代入曲面方程（1），可以得到关于新坐标系的曲面方程

$$a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}'z'^2 + 2a_{12}'x'y' + 2a_{13}'x'z' + 2a_{23}'y'z'$$
$$+ 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0$$

其中

$$a_{ik}' = (a_{11}l_i + a_{12}m_i + a_{13}n_i)l_k + (a_{21}l_i + a_{22}m_i + a_{23}n_i)m_k$$
$$+ (a_{31}l_i + a_{32}m_i + a_{33}n_i)n_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \qquad (3)$$

$$a_{p4}' = a_{14}l_p + a_{24}m_p + a_{34}n_p \quad (p = 1, 2, 3) \qquad (4)$$

$$a_{44}' = a_{44}$$

假定存在这样的坐标系 $Ox'y'z'$，使得 $a_{12}' = 0$，$a_{13}' = 0$，$a_{23}' = 0$，则 $a_{12}' = 0$，$a_{13}' = 0$，具有如下形式

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)l_2 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)m_2 + (a_{31}l_1$$
$$+ a_{32}m_1 + a_{33}n_1)n_2 = 0.$$

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)l_3 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)m_3 \qquad (5)$$
$$+ (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)n_3 = 0$$

如果把 $(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)$，$(a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)$，$(a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)$看作未知量，则（5）是有三个未知量的两个线性齐次方程构成的方程组。因此，可得

$$\frac{a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1}{\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}} = \frac{a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1}{\begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ n_3 & l_3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1}{\begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ l_3 & m_3 \end{vmatrix}} \qquad (6)$$

但，因为$\vec{e_2'} \times \vec{e_3'} = \vec{e_1'}$，所以

$$\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} = l_1, \quad \begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ n_3 & l_3 \end{vmatrix} = m_1, \quad \begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ l_3 & m_3 \end{vmatrix} = n_1.$$

因此，（6）可写为

$$\frac{a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1}{l_1} = \frac{a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1}{m_1}$$

$$= \frac{a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1}{n_1}$$

如果取它们的比值为 λ，则得

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 = 0 \\ a_{21}l_1 + (a_{22} - \lambda) m_1 + a_{23}n_1 = 0 \\ a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + (a_{33} - \lambda) n_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

方程组（7）有非零解 l_1，m_1，n_1，当且仅当λ是下列方程

$$I(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

的根。（8）叫做已知二次曲面的特征方程。方程（8）可写为

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \qquad (8')$$

而

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

设 λ_1, λ_2, λ_3 是方程（8'）的根，由代数可知

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\
I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}
\tag{10}
$$

设向量$\overrightarrow{e_1'} = \{l_1, m_1, n_1\}$的坐标$l_1$, m_1, n_1 是从条件$a_{12}' = 0$, $a_{13}' = 0$ 得出的方程组（7）中，当 $\lambda = \lambda_1$ 时得到的。

类似地，从条件 $a_{12}' = 0$, $a_{23}' = 0$ 和 $a_{13}' = 0$, $a_{23}' = 0$, 可以得到向量的坐标$\overrightarrow{e_2'} = \{l_2, m_2, n_2\}$, $\overrightarrow{e_3'} = \{l_3, m_3, n_3\}$，它们满足当 $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ 时的方程组（7）。

这样，如果存在坐标系 $Ox'y'z'$，使得二次曲面方程在该坐标系中不含有坐标的乘积项，则这个坐标系的每一个基本向量$\overrightarrow{e_k'} = \{l_k, m_k, n_k\}$ $(k = 1, 2, 3)$ 的坐标必满足方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda_k) l_k + a_{12}m_k + a_{13}n_k = 0 \\
a_{21}l_k + (a_{22} - \lambda_k) m_k + a_{23}n_k = 0 \\
a_{31}l_k + a_{32}m_k + (a_{33} - \lambda_k) n_k = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{7'}
$$

这里 λ_k 是特征方程（8）的根。

坐标满足方程组（7'）的向量叫做**特征向量**，特征向量的方向叫做已知二次曲面的**主方向**。

现在，我们指出特征方程的根和主方向的一些性质。

定理 1 二次曲面特征方程的根都是实数。

证明 设 λ_1 是特征方程的一个根。若 λ_1是复数，则可写为$\lambda_1 = a + bi$。如果λ_1对应的主方向是$\overrightarrow{e_1'}$，其坐标为 $l_1 = l + l'i$, $m_1 = m + m'i$, $n_1 = n + n'i$，则它们必满足如下方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}(l + l'i) + a_{12}(m + m'i) + a_{13}(n + n'i) = \lambda_1(l + l'i) \\
a_{21}(l + l'i) + a_{22}(m + m'i) + a_{23}(n + n'i) = \lambda_1(m + m'i) \\
a_{31}(l + l'i) + a_{32}(m + m'i) + a_{33}(n + n'i) = \lambda_1(n + n'i)
\end{aligned}
\right\}
$$

再以 l_1, m_1, n_1 的共轭复数 $l - l'i$, $m - m'i$, $n - n'i$分别去乘上面三个等式，然后等号各边相加，则得

$$a_{11}(l^2+l'^2)+a_{22}(m^2+m'^2)+a_{33}(n^2+n'^2)$$
$$+2a_{12}(lm+l'm')+2a_{13}(ln+l'n')+2a_{23}(mn+m'n')$$
$$=\lambda_1(l^2+l'^2+m^2+m'^2+n^2+n'^2).$$

因为 l_1, m_1, n_1 不能全等于零，所以 l, l', m, m', n, n' 也不能全为零，而且都为实数，所以 λ_1 必为实数．

又因 λ_1 是特征方程的任一根，所以特征方程的所有根都是实根．

因此，作为已知二次曲面主方向的坐标也都是实数．

定理 2　如果 λ_1, λ_2 是特征方程（8）的两个不同的根，那末对应这两个根的主方向互相垂直．

证明　设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个不同的根，并且向量（主方向）$\overrightarrow{e_1'}=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\overrightarrow{e_2'}=\{l_2, m_2, n_2\}$ 的坐标分别是λ_1, λ_2 对应的方程组（7′）的解．因此，下面的等式成立

$$\left.\begin{aligned}a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1&=\lambda_1 l_1\\a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1&=\lambda_1 m_1\\a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1&=\lambda_1 n_1\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}a_{11}l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2&=\lambda_2 l_2\\a_{21}l_2+a_{22}m_2+a_{23}n_2&=\lambda_2 m_2\\a_{31}l_2+a_{32}m_2+a_{33}n_2&=\lambda_2 n_2\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

如果等式（11）分别乘以 l_2, m_2, n_2, 而等式（12）分别乘以 l_1, m_1, n_1, 则得到

$$\left.\begin{aligned}a_{11}l_1l_2+a_{12}m_1l_2+a_{13}n_1l_2&=\lambda_1 l_1l_2\\a_{21}l_1m_2+a_{22}m_1m_2+a_{23}n_1m_2&=\lambda_1 m_1m_2\\a_{31}l_1n_2+a_{32}m_1n_2+a_{33}n_1n_2&=\lambda_1 n_1n_2\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

$$\left.\begin{aligned}a_{11}l_2l_1+a_{12}m_2l_1+a_{13}n_2l_1&=\lambda_2 l_2l_1\\a_{21}l_2m_1+a_{22}m_2m_1+a_{23}n_2m_1&=\lambda_2 m_2m_1\\a_{31}l_2n_1+a_{32}m_2n_1+a_{33}n_2n_1&=\lambda_2 n_2n_1\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

如果把等式（13）和（14）各自的等号两边相加，则得

$$A_1=\lambda_1(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2),$$

$$A_2=\lambda_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)。$$

因为 $A_1=A_2$，所以两个等式相减，则得

$$(\lambda_1-\lambda_2)(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)=0$$

因为，$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

因此，向量$\overrightarrow{e_1'}$ 和 $\overrightarrow{e_2'}$垂直，也就是主方向互相垂直。

定理 3　对于任意已知二次曲面，至少存在三个互相垂直的主方向。

证明　设已知二次曲面的一般方程（1）和它的特征方程的根 λ_1、λ_2、λ_3，而每个根至少可以确定一个与之对应的主方向。我们讨论如下三种可能情况。

第一种情形，　$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$。

先给出一个引理。如果三个实数 A,B,C 具有条件：

$$A+B+C=0 \qquad (*)$$

$$AB+AC+BC\geqslant0 \qquad (**)$$

则

$$A=B=C=0$$

实际上，如果

$A+B+C=0$，则 $(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2(AB+AC+BC)=0$

根据条件（* *），显然 $A=B=C=0$。所以，引理是正确的。

因为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 是特征方程（8′）的根，所以

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3\lambda_1,$$

或

$$I_1-3\lambda_1=(a_{11}-\lambda_1)+(a_{22}-\lambda_1)+(a_{33}-\lambda_1)=0 \qquad (15)$$

由于　$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=3\lambda_1^2$

所以　$I_2-3\lambda_1^2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2-3\lambda_1^2$

$=(a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_1)+(a_{11}-\lambda_1)(a_{33}-\lambda_1)$

$+(a_{22}-\lambda_1)(a_{33}-\lambda_1)-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2-6\lambda_1^2$

$$+2I_1\lambda_1=0$$

但，$I_1=3\lambda_1$，因而，$-6\lambda_1^2+2I_1\lambda_1=-6\lambda_1^2+6\lambda_1^2=0$，

所以

$$(a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_1)+(a_{11}-\lambda_1)(a_{33}-\lambda_1)+(a_{22}-\lambda_1)(a_{33}-\lambda_1)$$
$$=a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\geqslant 0 \qquad (16)$$

由（15）和（16），并根据引理，可以断定

$$a_{11}-\lambda_1=a_{22}-\lambda_1=a_{33}-\lambda_1=a_{12}^2=a_{13}^2=a_{23}^2=0。$$

反之，设 $\lambda=\lambda_1$，方程组（7′）的所有系数等于零，也就是

$$a_{11}-\lambda_1=a_{22}-\lambda_1=a_{33}-\lambda_1=a_{12}=a_{13}=a_{23}=0，$$

于是，按公式（9），有 $I_1=3\lambda_1$，$I_2=3\lambda_1^2$，$I_3=\lambda_1^3$，因而，特征方程（8′）具有如下形式

$$-\lambda^3+3\lambda_1\lambda^2-3\lambda_1^2\lambda+\lambda_1^3=0$$

或 $$-(\lambda-\lambda_1)^3=0。$$

因此，在这种情况下，特征方程的所有根相等。

总之，使方程组（7′）的系数同时等于零的充分必要条件是特征方程（8）的根相等。在这种情形下，空间任一向量的坐标满足方程组（7′）。因而，空间任一向量都可以看作已知二次曲面的主方向。所以，当特征方程的根$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$时，任意两两垂直的三个向量都可以看作二次曲面的主方向。

第二种情形，$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$。

我们来证明，在这种情形下，当 $\lambda=\lambda_1$ 时，方程组（7′）仅包含一个独立的方程。为此，我们来研究由方程组（7′）的系数构成的矩阵：

$$T=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{pmatrix}$$

如果取如下表示式

$$a_{11}-\lambda_1=A_{11},\quad a_{22}-\lambda_1=A_{22},\quad a_{33}-\lambda_1=A_{33},$$
$$a_{ik}=A_{ik},\quad i\neq k\quad (i,k=1,2,3)。$$

则矩阵T可改写为

$$T=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

设 δ_{ik} 是矩阵T的元素A_{ik}的余子式，我们要证明$\delta_{ik}=0$。为此，我们来考查矩阵T的所有9个子式平方和S。

$$\begin{aligned}S&=\delta_{11}^2+\delta_{22}^2+\delta_{33}^2+2\delta_{12}^2+2\delta_{13}^2+2\delta_{23}^2\\ &=\delta_{11}^2+\delta_{22}^2+\delta_{33}^2+2\delta_{11}\delta_{22}+2\delta_{11}\delta_{33}+2\delta_{22}\delta_{33}-2[(\delta_{11}\delta_{22}\\ &\quad-\delta_{12}^2)+(\delta_{22}\delta_{33}-\delta_{23}^2)+(\delta_{11}\delta_{33}-\delta_{13}^2)].\end{aligned}$$

但，

$$\begin{aligned}\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2&=(A_{22}A_{33}-A_{23}^2)(A_{11}A_{33}-A_{13}^2)\\ &\quad-(A_{21}A_{33}-A_{23}A_{31})^2\\ &=A_{33}\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}=A_{33}\cdot I'_3\end{aligned}$$

同理可得

$$\delta_{11}\delta_{33}-\delta_{13}^2=A_{22}\cdot I_3'$$

$$\delta_{22}\delta_{33}-\delta_{23}^2=A_{11}I_3'.$$

这样一来

$$S=(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})^2-2I_3'(A_{11}+A_{22}+A_{33})$$

但，$$\begin{aligned}A_{11}+A_{22}+A_{33}&=(a_{11}-\lambda_1)+(a_{22}-\lambda_1)+(a_{33}-\lambda_1)\\ &=I_1-3\lambda_1\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}&=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_{11} & A_{13}\\ A_{31} & A_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_1 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_1 & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}-\lambda_1\end{vmatrix}\\ &\quad+\begin{vmatrix}a_{22}-\lambda_1 & a_{33}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1\end{vmatrix}\\ &=3\lambda_1^2-2I_1\cdot\lambda_1+I_2\end{aligned}\qquad(17)$$

因为 λ_1 是（8）的根，根据公式（10），则有

$$\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3\lambda_1^2-2\lambda_1(2\lambda_1+\lambda_3)+(\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_3)=0$$

$$I_3'=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix}=0$$

于是

$$S=\delta_{11}^2+\delta_{22}^2+\delta_{33}^2+2\delta_{12}^2+2\delta_{13}^2+2\delta_{23}^2=0$$

从这个等式可知，$\delta_{ik}=0\,(i,k=1,2,3)$，因而，在方程组（7）中，最多存在一个独立的方程。因为 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，则根据第一种情形可以断定，方程组（7）的系数不能同时等于零。所以，当 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ 时，方程组（7）有一个独立的方程。

反之，也是正确的。

设方程组（7）有一个独立的方程。于是，方程组（7）的系数矩阵 T 的二阶行列式δ_{ik}都等于零。因此，由等式(17)得到

$$3\lambda_1^2-2I_1\lambda_1+I_2=0.$$

按公式（10）替换 I_1，I_2，则得

$$3\lambda_1^2-2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$$
$$=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3). \qquad (17')$$

特征方程的所有根不可能互等，因为若互等，则方程组（7）的所有系数必等于零（第一种情形），这与已给条件矛盾。

所以，从（17′）可以断定，或者 $\lambda_1-\lambda_2=0$，$\lambda_1-\lambda_3\neq0$；或者 $\lambda_1-\lambda_2\neq0$，$\lambda_1-\lambda_3=0$，也就是 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，或者 $\lambda_2\neq\lambda_1=\lambda_3$。

总之，使方程组（7）有一个独立方程的充分必要条件是特征方程（8）的两个根相等，但不等于第三个根。

现在，我们来研究在第二种情形下，二次曲面的主方向应当怎样确定。

设

$$(a_{11}-\lambda_1)l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1=0$$

是方程组（7）的一个独立方程。容易求出这个方程的任一解 $\vec{e_1'}=\{l_1, m_1, n_1\}$。然后，由方程

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2=0\\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\end{aligned}\right\}$$

确定垂直于 $\vec{e_1'}$ 的向量 $\vec{e_2'}=\{l_2, m_2, n_2\}$。

向量 $\vec{e_3'}$ 的坐标可由方程组（7）当 $\lambda=\lambda_3$ 时确定。但，我们还可用较简单的方法得到。方程

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1=0\\ (a_{11}-\lambda_1)l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2=0\end{aligned}\right\}$$

可以看作向量 $\vec{a}=\{a_{11}-\lambda_1, a_{12}, a_{13}\}$ 分别和向量 $\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$ 垂直的条件。所以向量 $\vec{e_3'}=k\vec{a}$，或写作

$$\vec{e_3'}=\{k(a_{11}-\lambda_1),\ ka_{12},\ ka_{13}\}.$$

这样，向量 $\vec{e_3'}$ 同时垂直于两个互相垂直的向量 $\vec{e_1'}$ 和 $\vec{e_2'}$。因此，向量 $\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$ 可以作为已知二次曲面的主方向。

第三种情形，$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\lambda_1\neq\lambda_3$，$\lambda_2\neq\lambda_3$。

在这种情形中，方程组（7）的系数不可能同时等于零（第一种情形，也不可能仅含一个独立的方程(第二种情形)。因此，方程组（7）必含有两个独立的方程。

反之，如果方程组（7），对于 $\lambda=\lambda_1$ 含有两个独立的方程，则根据第一和第二种情形可以断定

$$\lambda_1\neq\lambda_2,\quad \lambda_1\neq\lambda_3,\quad \lambda_2\neq\lambda_3.$$

总之，使方程组（7）存在两个独立方程的充分必要条件是特征方程（8）的所有根不相等。

在情形三中，特征方程的每一个根确定一个主方向 $\vec{e'_k}$。根据定理1，向量 $\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$ 是相互垂直的。

综上所述，定理得证。

定理 4 在坐标系$Oxyz$中，已知二次曲面的一般方程，若以曲面的主方向$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$作为坐标系$Ox'y'z'$的基本向量，则已知曲面方程在坐标系$Ox'y'z'$中具有如下形状

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0.$$

证明 设

$$e_k' = \{l_k,\ m_k,\ n_k\} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

它们的混合积为

$$\vec{e_1'}\,\vec{e_2'}\,\vec{e_3'} = 1$$

也就是向量组$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$是右旋的。

如果绕坐标原点旋转坐标系$Oxyz$，使新坐标系的轴Ox'，Oy'，Oz'分别具有方向$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$，$\vec{e_3'}$，则已知曲面的方程具有如下形状

$$a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}'z'^2 + 2a_{12}'x'y' + 2a_{13}'x'z'$$
$$+ 2a_{23}'y'z' + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0,$$

其中
$$a_{kt}' = (a_{11}l_k + a_{12}m_k + a_{13}n_k)l_t + (a_{21}l_k + a_{22}m_k$$
$$+ a_{23}n_k)m_t + (a_{31}l_k + a_{32}m_k + a_{33}n_k)n_t$$
$$(k, t = 1, 2, 3) \qquad (3)$$

$$a_{p4}' = a_{14}l_p + a_{24}m_p + a_{34}n_p \quad (p = 1, 2, 3) \qquad (4)$$

因为向量$\vec{e_k'}$是主方向，则它们的坐标必满足方程组（7），也就是

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_k + a_{12}m_k + a_{13}n_k &= \lambda_k l_k \\ a_{21}l_k + a_{22}m_k + a_{23}n_k &= \lambda_k m_k \\ a_{31}l_k + a_{32}m_k + a_{33}n_k &= \lambda_k n_k \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, 3) \qquad (18)$$

由（18）和等式（3），我们得到

$$a_{kt}' = (\lambda_k l_k)l_t + (\lambda_k m_k)m_t + (\lambda_k n_k)n_t$$
$$= \lambda_k(l_k l_t + m_k m_t + n_k n_t) = \lambda_k(\vec{e_k'}\,\vec{e_t'})$$
$$(k, t = 1, 2, 3)$$

若$k = t$，则$a_{kk}' = \lambda_k(\vec{e_k'})^2 = \lambda_k$（$|e_k'| = 1$）。

若 $k \neq t$，则 $a_{kk}' = 0$. $(\vec{e}_k' \perp \vec{e}_t')$.

因此，定理得到证明.

下面，我们研究两个例子.

例1 用旋转变换化简方程

$$5x^2 + 7y^2 + 6z^2 - 4xz + 4yz - 10x + 14y + 8z - 6 = 0.$$

解 1）作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

或

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

解此方程，则得 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 9$，$\lambda_3 = 6$.

2）在行列式Δ中，它的元素是由方程组（7'）的系数组成的，由它可以确定向量$\vec{e}_k = \{l_k, m_k, n_k\}$的坐标.

对于每个λ值，由行列式Δ的某两行元素构成一个矩阵，使其秩等于2. 所求向量的坐标就是由这个矩阵元素按轮换顺序构成的二阶行列式的比.

当 $\lambda_1 = 3$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_1 : m_1 : n_1 = 2 : (-1) : 2$.

或 $l_1 = \dfrac{2}{3}$，$m_1 = -\dfrac{1}{3}$，$n_1 = \dfrac{2}{3}$.

即 $\vec{e}_1' = \left\{\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

当 $\lambda_2 = 9$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_2 : m_2 : n_2 = -1 : 2 : 2$,

或 $l_2=-\frac{1}{3},\quad m_2=\frac{2}{3},\quad n_2=\frac{2}{3}.$

即 $\vec{e_2}'=\left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}.$

当 $\lambda_3=6$，有矩阵

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

由此，得 $l_3:m_3:n_3=2:2:-1,$

或 $l_3=\frac{2}{3},\quad m_3=\frac{2}{3},\quad n_3=-\frac{1}{3},$

即 $\vec{e_3}'=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\}.$

因为 $\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'=-1$，则向量组 $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$ 与 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ 有不同的定向。为了使坐标系 $Ox'y'z'$ 与 $Oxyz$ 有相同的定向，只要把求得的向量之一（如 $\vec{e_3}'$）改变符号就可以了。这样，就得到

$$\vec{e_1}'=\left\{\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\},\quad \vec{e_2}'=\left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\},$$

$$\vec{e_3}'=\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}.$$

3）按公式

$$a_{p4}'=a_{14}l_p+a_{24}m_p+a_{34}n_p\quad (p=1,2,3)$$

求得

$$a_{14}'=-3,\quad a_{24}'=9,\quad a_{34}'=0.$$

因而，已知方程化简为

$$3x'^2+9y'^2+6z'^2-6x'+18y'-6=0$$

例2 用旋转变换化简方程

$$x^2+2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0.$$

解 作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

或 $\qquad \lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$。

求得它的解为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$，$\lambda_3 = 6$。

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$，方程组（7′）为

$$\left.\begin{aligned} 4l_1 + 2m_1 - 4n_1 = 0 \\ 2l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 \\ -4l_1 - 2m_1 + 4n_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

这个方程组只有一个独立的方程，如

$$2l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 \qquad \text{(a)}$$

由它可确定基本向量$\vec{e_1}'$。可任取一个解，如

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

基本向量$\vec{e_2}'$的坐标 l_2，m_2，n_2 也满足这个方程，即

$$2l_2 + m_2 - 2n_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

由于向量$\vec{e_2}'$与向量$\vec{e_1}'$垂直，所以$\vec{e_2}'$的坐标还满足如下方程

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

把$\vec{e_1}'$的坐标 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ 代入，则得

$$l_2 + n_2 = 0 \qquad \text{(c)}$$

解由（b）、（c）联立的方程组

$$\left.\begin{aligned} 2l_2 + m_2 - 2n_2 = 0 \\ l_2 + n_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

则得

$$\frac{l_2}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{m_2}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{n_2}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}.$$

由此可确定 $l_2:m_2:n_2=1:-4:-1$。

或 $$l_2=-\frac{1}{3\sqrt{2}},\quad m_2=-\frac{4}{3\sqrt{2}},\quad n_2=-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

即 $$\vec{e_2'}=\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}},\quad -\frac{4}{3\sqrt{2}},\quad -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}$$

因为基本向量$\vec{e_3'}$垂直于$\vec{e_1'}$和 $\vec{e_2'}$，所以，对于 $\lambda_3=6$ 不必由方程组（7′）求解。方程(a)和(b)可以看做向量 $\vec{e_1'}$和$\vec{e_2'}$垂直于向量{2，1，－2}的条件。显然，向量{2，1，－2}与基本向量$\vec{e_3'}$共线。因此得

$$l_3=\frac{2}{3},\quad m_3=\frac{1}{3},\quad n_3=-\frac{2}{3}$$

即 $$e_3'=\left\{\frac{2}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3}\right\}$$

按公式 $a_{p4}'=a_{14}l_p+a_{24}m_p+a_{34}n_p \qquad (p=1,\ 2,\ 3)$

确定 $a_{14}'=0$，$a_{24}'=\sqrt{2}$，$a_{34}'=-10$。

因此，已知方程化简为

$$-3x'^2-3y'^2+6z'^2+2\sqrt{2}y'-20z'+16=0$$

§4　有心二次曲面的标准方程

现在，我们来研究有心二次曲面的标准方程。

由定理4已知，任一二次曲面的一般方程利用旋转变换都可变为如下形式

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}'z'+a_{44}'=0 \tag{1}$$

这里，λ_1、λ_2、λ_3 是特征方程的根。

因为，方程（1）确定有心二次曲面的必要充分条件是 $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq0$。所以，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ 都不能等于零。

在这种条件下，方程（1）可改写为

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a_{24}'}{\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z'+\frac{a_{34}'}{\lambda_3}\right)^2$$

$$+\left(a_{44}'-\frac{a_{14}'^2}{\lambda_1}-\frac{a_{24}'^2}{\lambda_2}-\frac{a_{34}'^2}{\lambda_3}\right)=0$$

若进行坐标系的平移变换

$$\left.\begin{aligned}x'&=x''+\left(-\frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)\\y'&=y''+\left(-\frac{a_{24}'}{\lambda_2}\right)\\z'&=z''+\left(-\frac{a_{34}'}{\lambda_3}\right)\end{aligned}\right\}$$

使得新坐标系的原点与点$O'\left(-\frac{a_{14}'}{\lambda_1},\ -\frac{a_{24}'}{\lambda_2},\ -\frac{a_{34}'}{\lambda_3}\right)$重合，

则方程（1）就变成如下最简形式

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+\lambda_3z''^2+a_{44}''=0 \qquad (2)$$

这里，

$$a_{44}''=a_{44}'-\frac{a_{14}'^2}{\lambda_1}-\frac{a_{24}'^2}{\lambda_2}-\frac{a_{34}'^2}{\lambda_3}.$$

方程（2）还可以按以下几种情况进行分类。

1° 当 λ_1，λ_2，λ_3 的符号相同，但与 a_{44}''的符号不同。这时，用 a_{44}'' 除已知方程的各项，且令

$$\frac{\lambda_1}{a_{44}''}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{\lambda_2}{a_{44}''}=\frac{1}{b^2},\quad \frac{\lambda_3}{a_{44}''}=\frac{1}{c^2},$$

则得

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1 \qquad ①$$

这就是我们已知的椭圆面的标准方程。

2° 当 λ_1，λ_2，λ_3 的符号相同，并且与 a_{44}'' 的符号也相同。

这时，用 a_{44}'' 除已知方程的各项，且令

$$\frac{\lambda_1}{a_{44}''}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{\lambda_2}{a_{44}''}=\frac{1}{b^2},\quad \frac{\lambda_3}{a_{44}''}=\frac{1}{c^2},$$

则得

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=-1. \qquad ②$$

因为没有任何一组实数满足这个方程，所以它不能表示任何实的几何图形．但这时，我们说方程②表示**虚椭圆面**，方程②是它的标准方程．

3° 当 λ_1、λ_2，λ_3 的符号相同，并且 $a_{44}''=0$。

这时，若令

$$|\lambda_1|=\frac{1}{a^2},\quad |\lambda_2|=\frac{1}{b^2},\quad |\lambda_3|=\frac{1}{c^2},$$

则已知方程变为

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=0 \qquad ③$$

因为只有一组数０，０，０满足这个方程，所以它确定一个点．因此，我们说方程③表示点椭圆面，方程③叫做**点椭圆面**的标准方程。

4° 当 λ_1，λ_2，λ_3 中有两个符号相同，并且 a_{44}''与另一个符号相同。

这时，用 a_{44}'' 除已知方程各项，且令

$$-\frac{\lambda_1}{a_{44}''}=\frac{1}{a^2},\quad -\frac{\lambda_2}{a_{44}''}=\frac{1}{b^2},\quad \frac{\lambda_3}{a_{44}''}=\frac{1}{c^2},$$

则得

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1 \qquad ④$$

这就是我们已知的单叶双曲面的标准方程。

5° 当 λ_1．λ_2，λ_3 中有两个符号相同，如 λ_1，λ_2，并且与 a_{44}'' 的符号也相同。

这时，用 a_{44}'' 除已知方程的各项，且令

$$\frac{\lambda_1}{a_{44}''}=-\frac{1}{a^2},\quad \frac{\lambda_2}{a_{44}''}=-\frac{1}{b^2},\quad \frac{\lambda_3}{a_{44}''}=\frac{1}{c^2},$$

则得

$$\frac{x''}{a^2}+\frac{y''}{b^2}-\frac{z''}{c^2}=-1 \qquad ⑤$$

这就是我们已知的**双叶双曲面的标准方程**。

6° 当 λ_1，λ_2，λ_3 中有两个符号相同，如 λ_1，λ_2，并且 $a_{44}''=0$。

这时，令

$$|\lambda_1|=\frac{1}{a^2},\quad |\lambda_2|=\frac{1}{b^2},\quad |\lambda_3|=\frac{1}{c^2},$$

则得

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=0 \qquad ⑥$$

这就是我们已知的**二次锥面的标准方程**。

由上所述可知，有心二次曲面只有6种。

例 判定方程

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$$

所表示曲面的类型并求其标准方程。

解 因为

$$I_3=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{vmatrix}=-36\neq0,$$

所以，已知曲面是有心的。

作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

或 $\qquad \lambda^3-7\lambda^2+36=0$。

解之，得 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$。

利用行列式Δ的行元素，对每个 λ 值求向量 $\overrightarrow{e_k'}=\{l_k, m_k, n_k\}$ 的坐标。

当 $\lambda_1=3$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_1:m_1:n_1=-1:1:-1$,

或 $l_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $m_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $n_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

即 $\overrightarrow{e_1'}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

当 $\lambda_3=6$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_2:m_2:n_2=1:2:1$.

或 $l_2=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $m_2=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $n_2=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

即 $\overrightarrow{e_2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

当 $\lambda_3=-2$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_3:m_3:n_3=-1:0:1$,

或 $l_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $m_3=0$, $n_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

即 $\overrightarrow{e_3'}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

因为$\overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_3'}=-1$，所以$\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$. $\overrightarrow{e_3'}$ 与 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$有不同的

定向。为了使坐标系 $Ox'y'z'$ 与 $Oxyz$ 有相同的定向，只要改变$\vec{e_1}'$，$\vec{e_2}'$，$\vec{e_3}'$之一的符号即可，例如改变 $\vec{e_2}'$ 的符号，则得

$$\vec{e_1}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$\vec{e_2}' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\vec{e_3}' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

按公式

$$a_{p4}' = a_{14}l_p + a_{24}m_p + a_{34}n_p$$

求得

$$a_{14}' = \frac{3}{\sqrt{3}},\ a_{24}' = -\frac{6}{\sqrt{6}},\ a_{34}' = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

所以，方程化简为

$$3x'^2 + 6y'^2 - 2z'^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}x' - \frac{12}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{\sqrt{2}}z' = 0.$$

把方程再改写为

$$3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$-1 = 0.$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y' &= y'' + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ z' &= z'' + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

则得

$$3x''^2 + 6y''^2 - 2z''^2 - 1 = 0.$$

由方程可以看出，曲面是单叶双曲面，其标准方程为

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{z''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

对于有心二次曲面一般方程的化简，也可先平移后旋转，也就是，先把坐标原点移到二次曲面的中心，消去一次项；然后，再进行旋转变换消去坐标的乘积项。

§5 无心二次曲面的标准方程

现在，我们来研究无心二次曲面的标准方程。

我们已知，任一二次曲面的一般方程利用旋转变换可以变为如下形式

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}'z'+a_{44}'=0 \tag{1}$$

这里，λ_1，λ_2，λ_3 是特征方程的根。

方程（1）确定无心二次曲面的必要充分条件是 $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$。因此，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中至少有一个等于零。但，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$不能同时等于零，否则方程就不是二次的，这与已知条件矛盾。

下面，我们按几种具体情况加以研究。

1° 当 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有一个等于零，例如 $\lambda_3=0$，但 $\lambda_1\neq0$，$\lambda_2\neq0$，并且 $a_{34}'\neq0$。

这时，把已知方程（1）变为如下形式

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a_{24}'}{\lambda_2}\right)^2+2a_{34}'z'$$
$$+\left(a_{44}'-\frac{a_{12}'^2}{\lambda_1}-\frac{a_{24}'^2}{\lambda_2}\right)=0$$

或 $$\lambda_1\left(x'+\frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a_{24}'}{\lambda_2}\right)^2+2a_{34}'\left(z'+\frac{a_{44}''}{2a_{34}'}\right)$$
$$=0.$$

这里，

$$a_{44}'' = a_{44}' - \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{24}'^2}{\lambda_2}.$$

若作坐标系的平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{a_{14}'}{\lambda_1} \\ y' &= y'' - \frac{a_{24}'}{\lambda_2} \\ z' &= z'' - \frac{a_{44}''}{2a_{34}'} \end{aligned}\right\}.$$

使得新坐标原点与 $O'\left(-\frac{a_{14}'}{\lambda_1}, -\frac{a_{24}'}{\lambda_2}, -\frac{a_{44}''}{2a_{34}'}\right)$ 重合，则曲面方程变为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a_{34}' z'' = 0.$$

容易看出，这个方程有如下两种形式

1）当 λ_1 与 λ_2 同号时

$$\frac{x''^2}{p} + \frac{y''^2}{q} = \pm 2z'' \qquad (p>0, \ q>0) \qquad ①$$

2）当 λ_1 与 λ_2 异号时

$$\frac{x''^2}{p} - \frac{y''^2}{q} = \pm 2z'' \qquad (p>0, \ q>0) \qquad ②$$

这就是我们已知的椭圆抛物面和双曲抛物面的标准方程。

2° 当 λ_1, λ_2, λ_3 中有一个等于零，例如 $\lambda_3 = 0$，但 $\lambda_1 \neq 0$，$\lambda_2 \neq 0$，并且 $a_{34}' = 0$。

这时，已知方程（1）变为如下形式

$$\lambda_1\left(x' - \frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_{24}'}{\lambda_2}\right)^2$$

$$+\left(a_{44}' - \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{24}'^2}{\lambda_2}\right) = 0.$$

若令

$$a_{44}' - \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{24}'^2}{\lambda_2} = a_{44}'',$$

同时，作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{a_{14}'}{\lambda_1} \\ y' &= y'' - \frac{a_{24}'}{\lambda_2} \\ z' &= z'' \end{aligned}\right\}$$

则得

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_{44}'' = 0.$$

不难看出，这个方程可能有如下几种情况：

1）当 λ_1，λ_2 同号，且与 a_{44}'' 不同号，则得

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad ③$$

2）当 λ_1，λ_2 同号，且与 a_{44}'' 同号，则得

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1 \qquad ④$$

3）当 λ_1, λ_2 同号，但 $a_{44}'' = 0$，则得

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \qquad ⑤$$

4）当 λ_1, λ_2 不同号，但 $a_{44}'' \neq 0$，则得

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad ⑥$$

5）当 λ_1, λ_2 不同号，而且 $a_{44}'' = 0$，则得

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \qquad ⑦$$

我们已知，方程③、⑥是椭圆柱面、双曲柱面的标准方程。方程④叫做虚椭圆柱面的标准方程。方程⑤表示一条直

线，可以看做退化的椭圆柱面．而方程⑦表示一对相交的平面，可以看做退化的双曲柱面．

3° 当 λ_1，λ_2，λ_3 中有两个等于零，例如 $\lambda_2=\lambda_3=0$，但 $\lambda_1\neq0$，而且 a_{24}'，a_{34}' 中至少有一个不等于零，也就是 $a_{24}'^2+a_{34}'^2\neq0$。

若 $a_{34}'\neq0$，则曲面方程（1）可写为

$$\lambda_1x'^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}'z'+a_{44}'=0$$

再变形为

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2+2a_{24}'y'+2a_{34}'\left(z'+\frac{a_{44}''}{2a_{34}'}\right)=0.$$

其中

$$a_{44}''=a_{44}'-\frac{a_{14}'^2}{\lambda_1}.$$

按公式

$$\left.\begin{aligned}x'&=x''-\frac{a_{14}'}{\lambda_1}\\y'&=y''\\z'&=z''-\frac{a_{44}''}{2a_{34}'}\end{aligned}\right\}$$

平移坐标系，使坐标原点与点$O'\left(-\frac{a_{14}'}{\lambda_1},0,-\frac{a_{44}''}{2a_{34}'}\right)$重合，则曲面方程变为

$$\lambda_1x''^2+2a_{24}'y''+2a_{34}'z''=0$$

再绕 $O'x''$ 轴对坐标系 $O'x''y''z''$ 进行旋转变换（旋转角为 φ）

$$\left.\begin{aligned}x''&=x'''\\y''&=y'''\cos\varphi-z'''\sin\varphi\\z''&=y'''\sin\varphi+z'''\cos\varphi\end{aligned}\right\},$$

其中

$$\sin\varphi = \frac{a_{34}'}{\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}}, \quad \cos\varphi = -\frac{a_{24}'}{\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}},$$

或

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x''' \\ y'' &= \frac{a_{24}' y''' - a_{34}' z'''}{\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}} \\ z'' &= \frac{a_{34}' y''' + a_{24}' z'''}{\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}} \end{aligned}\right\}$$

则曲面方程化简为

$$\lambda_1 x'''^2 + 2\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}\, y''' = 0$$

或 $$x'''^2 = \pm 2py''' \qquad ⑧$$

这就是我们已知的抛物柱面的标准方程。

4° 当 λ_1，λ_2，λ_3 中有两个等于零，例如 $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$，但 $\lambda_1 \neq 0$，而且 $a_{24}' = a_{34}' = 0$。

在这种情形下，方程（1）变为

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2 + a_{44}' - \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1} = 0$$

若令 $$a_{44}'' = a_{44}' - \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1},$$

并作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{a_{14}'}{\lambda_1} \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' \end{aligned}\right\}$$

则曲面方程变为

$$\lambda_1 x''^2 + a_{44}'' = 0$$

这个方程可能有如下三种形式

$$x''^2 = a^2 \qquad ⑨$$

$$x''^2 = -a^2 \qquad ⑩$$

$$x''^2=0 \tag{11}$$

方程⑨表示一对平行平面，方程⑩表示一对虚平面，方程⑪表示一对重合平面。

由上所述可知，无心二次曲面只有11种。

例 把方程

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$$

化简为标准方程。

解 因为

$$I_3=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=0$$

所以，已知二次曲面是无心的。

作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 2 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

或 $\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0$。

解此方程，得到 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=0$。

利用行列式 Δ 的行元素，对每个 λ 值求向量 $\vec{e_k}'=\{l_k, m_k, n_k\}$ 的坐标。

当 $\lambda_1=2$，有矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由此，得 $l_1:m_1:n_1=1:1:-2$，

或 $l_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$，$m_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$，$n_1=-\frac{2}{\sqrt{6}}$。

即 $\vec{e_1}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$。

当 $\lambda_2=5$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_2:m_2:n_2=1:1:1$

或 $l_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad m_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad n_2=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

即 $\overrightarrow{e_2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$

当 $\lambda_3=0$，有矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

由此，得 $l_3:m_3:n_3=1:-1:0$，

或 $l_3=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad m_3=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad n_3=0.$

即 $\overrightarrow{e_3'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\quad-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0\right\}.$

因为 $\overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_3'}=1$，所以$\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$，$\overrightarrow{e_3'}$ 与坐标系 $Oxyz$有相同的定向.

根据公式

$$a_{p4}'=a_{14}l_p+a_{24}m_p+a_{34}n_p\qquad(p=1,2,3)$$

求得

$$a_{14}'=\frac{\sqrt{6}}{2},\quad a_{24}'=0,\quad a_{34}'=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

于是，曲面方程变为

$$2x'^2+5y'^2+\sqrt{6}x'-5\sqrt{2}z'+3=0.$$

把它再改为

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+5y'^2-5\sqrt{2}\left(z'-\frac{9\sqrt{2}}{40}\right)=0,$$

并作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' + \frac{9\sqrt{2}}{40} \end{aligned}\right\}$$

则得

$$2x''^2 + 5y''^2 - 5\sqrt{2}z'' = 0.$$

或 $$2x''^2 + 5y''^2 = 5\sqrt{2}z''.$$

因此，已知曲面是椭圆抛物面．它的标准方程为

$$\frac{x''^2}{\frac{5\sqrt{2}}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2z''.$$

由上述讨论可以看出，对于无心二次曲面一般方程的化简，必须先旋转后平移．

§6 二次曲面的分类

总括起来，三元二次的一般方程，可以通过坐标系的旋转、平移变换，把它化简为如下五种最简形式

Ⅰ $\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \lambda_3Z^2 + a_{44}'' = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0)$

Ⅱ $\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + 2a_{34}'Z = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0, a_{34}' \neq 0)$

Ⅲ $\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + a_{44}'' = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0, a_{34}' = 0)$

Ⅳ $\lambda_1X^2 + 2\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}\,Y = 0$

$(\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, a_{24}'^2 + a_{34}'^2 \neq 0)$

Ⅴ $\lambda_1X^2 + a_{44}'' = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, a_{24}'^2 = a_{34}'^2 = 0)$

这五种最简形式，进而还可以化简为前边讨论过的17种标准方程．

同时，我们已经知道，三元二次的一般方程，它确定的二次曲面有17种类型，其中有心的 6 种，无心的11种．

现在，我们把这17种类型列表如下：

类序	标准方程	曲面形状	曲面名称
1	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$		椭 圆 面
2	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1$		虚椭圆面
3	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$		单叶双曲面
4	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$		双叶双曲面
5	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$		锥 面
6	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$		点 （虚锥面）
7	$\frac{Y^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$		椭圆抛物面

续表

类序	标准方程	曲面形状	曲面名称
8	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z$		双曲抛物面
9	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$		椭圆柱面
10	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$		虚椭圆柱面
11	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=\pm 1$		双曲柱面
12	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$		一对相交平面
13	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$		直线（一对相交的虚平面）
14	$X^2=\pm 2pY$		抛物柱面

续表

类序	标准方程	曲面形状	曲面名称
15	$X^2-a^2=0$		一对平行平面
16	$X^2+a^2=0$		一对虚平行平面
17	$X^2=0$		一对重合平面

习　题

1．已知坐标平移变换公式为 $x=x'-1$，$y=y'+2$，$z=z'+3$．试求点 $A(4,6,1)$、$B(2,3,-2)$，$C(-2,3,4)$在新坐标系中的坐标．

2．已知点M在旧、新坐标系中的坐标为 $M(2,3,1)$和 $M'(0,1,2)$．试求坐标平移变换公式．

3．已知一点 $M(3,1,-2)$，若点M为平移后的新坐标系的原点，试求

（1）旧坐标原点在新坐标系中的坐标；

（2）点 $A(4,2,0)$ 在新坐标系中的坐标；

（3）点A关于坐标原点的对称点在新坐标系中的坐标．

4．已知点 $A(-1,2,3)$ 在平移后新坐标系的 $O'x'y'$ 平面上．点 $B(3,1,2)$ 在 $O'y'z'$ 平面上．点 $C(4,0,1)$ 在 $O'x'z'$ 平面上，试求满足此条件的坐标平移变换公式．

5．将坐标原点平移到点 $M_0(1,2,3)$ 处，试变换下列方程

（1）$3x-5y+6z-1=0$；

（2）$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{2}$；

（3）$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-7x-8y-9z+19=0$。

6．试证：在平移变换下，恒有

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}。$$

7．已知旋转后的新坐标轴上的三个单位向量为：$\vec{i'}=\left\{-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right\}$，$\vec{j'}=\left\{\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right\}$，$\vec{k'}=\left\{\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right\}$，试求坐标变换公式和点 $P(-1,1,0)$ 在新坐标系中的坐标。

8．验证下列三个向量可否作为新坐标系中三个轴上的单位向量。

$$\vec{e_1}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

$$\vec{e_2}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$$

$$\vec{e_3}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}。$$

9．已知相互垂直的三条直线 p_1：$x=y=z$，p_2：$x=\dfrac{y}{-2}=z$，p_3：$x=-z$，$y=0$，试求以此三条直线为新坐标轴的坐标变换公式。

10．设空间任一点 $M(x,y,z)$ 经旋转变换后的坐标为 $M'(x',y',z')$，试证：$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$。

11．将坐标系绕 Oz 轴旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，变换方程

$$x^2+3xy+y^2+2z^2-8x=0。$$

12．试用坐标系的旋转变换消去方程

$$x^2-y^2-z^2+2yz+2x-8z=0$$

中的 yz 项。

13．已知三角形的顶点 $A(-10,5,4)$，$B(5,-3,4)$，$C(-9,9,1)$，试确定一坐标变换，使三角形 ABC 在 $O'x'y'$ 平面上，A 点为新的坐标原点，B 点在 $O'x'$ 轴的正向上，C 点的纵坐标 $y'>0$。

14．试确定一坐标变换公式，使平面方程 $2x+y+2z+5=0$ 变换为 $x'=0$。

15．判断下列曲面是否有中心，若有中心，试求之。

（1）$4x^2+2y^2+12z^2-4xy+12xz+8yz+14x-10y+7=0$；

（2）$5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6xz+12x-36z=0$；

（3）$x^2-2y^2+z^2+6yz-4xz-8x+10y=0$；

（4）$x^2+4y^2+5z^2+4xy-12x+6y-9=0$；

（5）$3x^2+2y^2+4yz-2xz-4x-8z-8=0$。

16．用平移变换化简下列有心曲面方程。

（1）$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0$；

（2）$y^2+3xy+2yz+xz+3x+2y=0$；

（3）$x^2+2y^2-z^2+2x-4y+2z+1=0$。

17．已知曲面的中心为 $O'(0,0,-1)$，且通过点 $M(2,0,-1)$，它与 Oxy 平面的交线为 $\begin{cases}x^2-4xy-1=0\\ z=0,\end{cases}$ 试求此曲面方程。

18．试证：对任意实数 a,b，方程 $4y^2-2z^2+x+ay+bz=0$ 均表示无心曲面。并求曲面顶点的轨迹。

19．试证：曲面为无心的必要充分条件是

$$a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}=a_{11}a^2_{23}+a_{22}a^2_{13}+a_{33}a^2_{12}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是曲面方程中二次项的系数。

20．试求下列二次曲面特征方程的特征根。

（1）$x^2+y^2+z^2+4xy-4yz+4xz-3=0$。

（2）$4x^2+y^2+z^2+4xy+2yz+4xz-24x+32=0$。

（3）$x^2+3y^2+3z^2-2yz-2x-2y+6z+3=0$。

（4）$2x^2+5y^2+2z^2-2xy-2yz+4xz+14x-16y+24z=0$。

21．试求下列曲面的主方向。

（1）$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$；

（2）$x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+9=0$；

（3）$x^2+y^2-3z^2-2xy-6yz-6xz+2x+2y+4z=0$。

22．已知曲面方程为 $(2x+y+z)^2-(x-y-z)^2=y-z$，试确定它是什么曲面。

23．已知曲面具有三个两两垂直的对称平面 $\pi_1: x+y+z=0$，$\pi_2: 2x-y-z=0$，$\pi_3: y-z+1=0$，且通过点 $A(0,0,0)$，$B(1,1,-1)$，

$C(0,0,1)$，试求此曲面方程。

24．一柱面通过两点 $A(1,0,-1)$ 和 $B(2,0,2)$，且具有通过轴线的二对称平面 π_1：$x+2y+z=0$ 和 π_2：$x-z=0$，试求此柱面方程。

25．已知一旋转曲面的旋转轴是Oz轴，且曲面通过点 $A(1,0,0)$，$B(1,1,1)$，$C(0,1,2)$，试求此曲面方程。

26．试证：直线 $\begin{cases} x=a+lt \\ y=b+mt \\ z=c+nt \end{cases}$ 和曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$

相切的必要充分条件是

$$(Aal+Bbm+Ccn)^2=(al^2+bm^2+cn^2)(Aa^2+Bb^2+Cc^2+D).$$

27．用旋转变换化简下列方程，并写出坐标变换公式。

（1）$5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz-27=0$；

（2）$x^2+3y^2+3z^2-2yz-2x-2=0$；

（3）$x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz+4x-8y+12z+4=0$。

28．判别下列有心曲面的形状。

（1）$6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$；

（2）$x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0$；

（3）$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$；

（4）$4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z+7=0$。

29．化简下列无心曲面方程为标准形式。

（1）$2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$；

（2）$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$；

（3）$4x^2+y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz-12x-12y+6z=0$。

30．化简下列曲面方程为标准形式，并指出其形状。

（1）$7y^2-7z^2-8xy+8xz=0$；

（2）$4x^2-y^2-z^2+2yz-2y+4z+1=0$；

（3）$2y^2-2xy+2xz-2yz+2x+y-3z-5=0$；

（4）$x^2+y^2+9z^2-2xy+6xz-6yz-2x+2y-6z=0$；

（5）$y^2-xy+xz-yz+2x-2y=0$。

31．试证：方程 $2x^2+3y^2+3z^2-4xy-4xz+2yz+2y-2z+1=0$ 表示一条直线，并求此直线方程。

32．已知曲面方程 $5x^2+2y^2+5z^2+4xy-2xz+4yz+3x+2y+z=0$ 确定一旋转曲面，试求通过坐标原点和曲面旋转轴的平面方程。

第二部分　空间解析几何学习指导

第一章　空间坐标系学习指导

一　本章要点

这一章主要是建立坐标系（空间直角坐标系、极坐标系及柱面坐标系）和定义点的坐标，使空间里的点与有序三数组建立对应关系，从而就可以用有序三数组（点的坐标）来表示空间点的位置。特别是，由于使动点与变数对应起来，点的运动规律就可以用点的坐标所满足的关系式表示，也就是说，作为点的集合的空间图形，就可以用点的坐标所满足的方程来表示。这样，就可以通过对方程代数性质的讨论，来达到研究和了解它所表示的图形的几何性质的目的。因此，坐标系是用解析法来研究图形几何性质的基础。

二　基本要求

1　掌握三种坐标系的构成及点的三种坐标的定义；

2　注意球面坐标、柱面坐标的取值范围；

3　理解和掌握空间中所有点与所有有序三数组的一一对应关系，已知点的坐标会描点，已知点会求其坐标；

4　熟知特殊位置点的坐标特征；

5　注意培养空间想象能力。

三 内容分析

1　空间直角坐标系与直线上的坐标系

人们对客观事物的认识总是由简单到复杂、由低级到高级，空间直角坐标系的建立也是这样。在中学，我们曾学习过直线上的坐标系——数轴的概念。在直线上任意选定一个原点，确定一个正向和一个长度单位，这样就构成了直线上的坐标系——数轴，从而使直线上点与实数建立了“一一对应关系”。数轴上点 P 所对应的实数 x 称为 P 点的坐标（图 1）。



图 1

后来，人们根据科学技术发展的需要，把数轴——直线上的坐标系，先后推广为平面上及空间的直角坐标系。粗略来说，给了一个数轴，再加上与它垂直的一个数轴，就构成了平面直角坐标系。在此基础上，再加上一个与前两个数轴都垂直的第三个数轴，就构成了空间直角坐标系。简言之，有共同原点，相同长度单位，彼此垂直且排定了次序的三个数轴就构成了空间直角坐标系。在空间选定了一个直角坐标系，就使空间所有点与所有有序三数组之间建立了一一对应关系。在实践中，这方面的例子是很多的。例如，影院的一张电影票上印着“楼下（1 楼）二排 3 号”字样，这实际上就是用（1，2，3）三个数确定一个点的位置。

2　右手系与左手系

我们所说的空间直角坐标系 $Oxyz$ 中把三个轴按 Ox 轴（第一个坐标轴）、Oy 轴（第二个坐标轴）、Oz 轴（第三个坐标轴）的次序排起来，恰和右手拇指、食指和中指的先后次序一样，所以称这样的坐标系为右手系，反之称为左手系，如讲义中的图 3 与图 4。

由上述可知，只用右手系就可以使空间点与有序三数组之间建立一一对应，那么，为什么还要提出左手系呢？这是因为在物理学中，用坐标法来计算某些物理量时，在右手系中得到的是负值，在左手系中得到的是正值，为了研究问题方便，这时往往选用左手系。

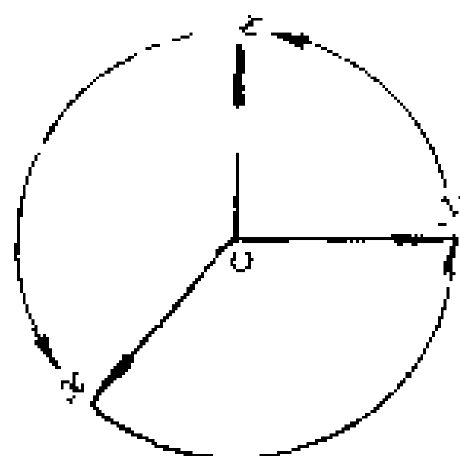


图 2

这里指出，坐标系$Oxyz$、$Oyzx$及$Ozxy$皆为右手系；坐标系$Oxzy$、$Ozyx$ 及 $Oyxz$ 皆为左手系。总之，Ox，Oy，Oz 三个轴按图 2 中逆时针来排列，无论哪一个在前，皆为右手系，否则为左手系。

另外，当第一个轴正向按右手四个指头握拳转向第二个轴正向时，大拇指的指向就是第三个轴的正向，也恰恰是右螺旋的前进方向，故右手系亦称为右旋系；同理，左手系也称为左旋系。

3　空间点与有序三数组

讲义的第一章第一节已经证明了空间点与有序三数组之间是一一对应的。这里一一对应关系是十分重要的。因为只有一一对应时，才有确定的意义，才能使“形”、“数”互相转化。这个问题比较直观的例子就是上面提到的电影票一例。如果有两组不同的数对应同一个座位，则显然达不到用数确定座位的目的。

根据点与有序三数组的一一对应，当已知空间一点时，就可求出其坐标，另一方面，知道了坐标，就可以描出它所代表的点。

下面，我们进一步说明：如何在一张纸上，也就是在平面上，画空间坐标系以及在一点P 的坐标 x, y, z 已知时，怎样把点P 在纸上画出来。在平面上画立体图总是有很大局限性的。在纸上画立体图，不可避免地会出现这样情况：空间不同的点（空间位置不同），画在纸（平面）上时，可能有相同的

位置。虽然这个问题较为复杂，但是这里介绍一种画图法，按照这种画法，往往获得较好的立体感和直观的效果。

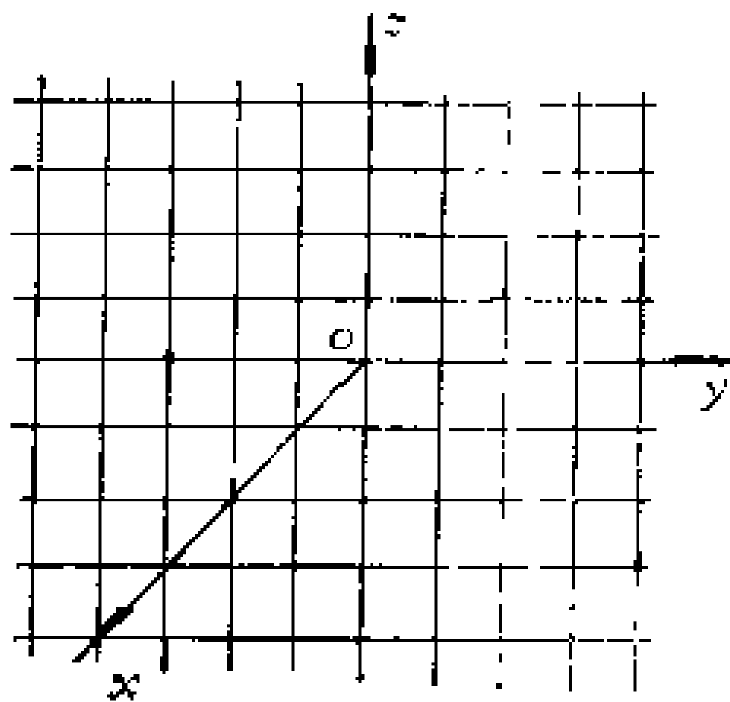


图 3

假定我们用的是一张方格纸（图3），上面印着一族纵和横的平行线，行距相等。取适当的纵线和横线的交点为原点O，从O起向右的射线为Oy轴的正向，向上的射线为Oz轴的正向，向左下方的对角线为Ox轴的正向。在纸上，令Oy轴和Oz轴的单位长相等，但Ox轴的单位长则等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。换句话说：若以Oy轴和Oz轴的单位长作正方形，则在纸上，令Ox轴的单位长等于正方形的对角线的一半。这样，直观上就会觉得这三个轴上的单位长是大体相同的。有了以上的作法，已知一点p的坐标x, y, z就可以在纸上画出P点的位置。如图4或图5。描图时，近处描粗些，远处描细些，就显得有立体感。

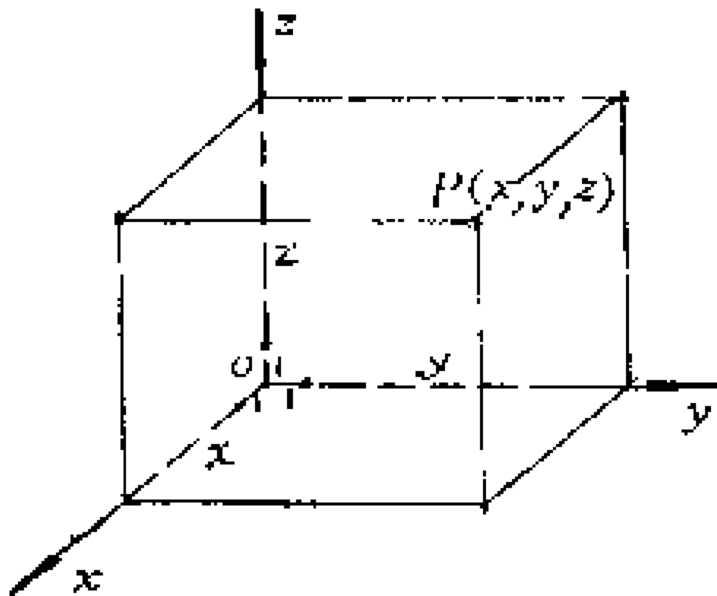


图 4

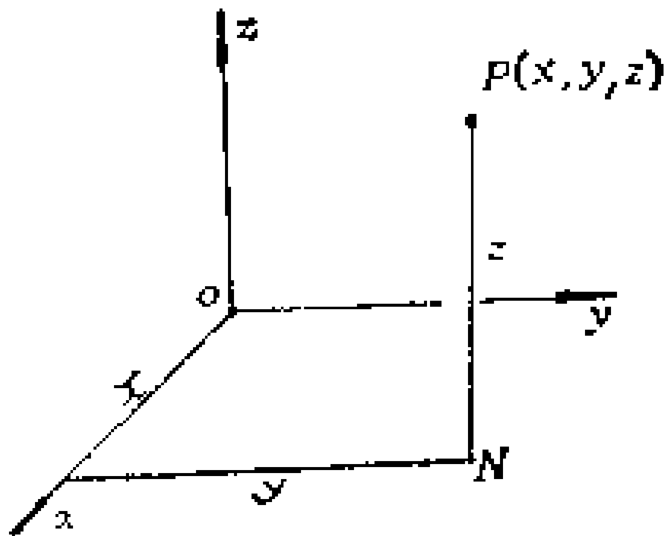


图 5

4　空间极坐标系与平面极坐标系

我们学过平面上的极坐标系，在该坐标系中，平面上点的坐标是用数对（ρ，θ）来表示的。在平面上导入极坐标系，实

际上是由一组同心圆及一组过圆心的射线组成的。如图6，直观上看去，象是蜘蛛网。对于平面上（除O点外）任一点M，就是由同心圆中的一个圆及过圆心的一条射线确定的。换句话说，平面上的每个点M，一定在某个同心圆的圆周上和通过圆心的某一射线上。所以，所有的同心圆与过圆心的所有射线的交点，布满了整个平面。

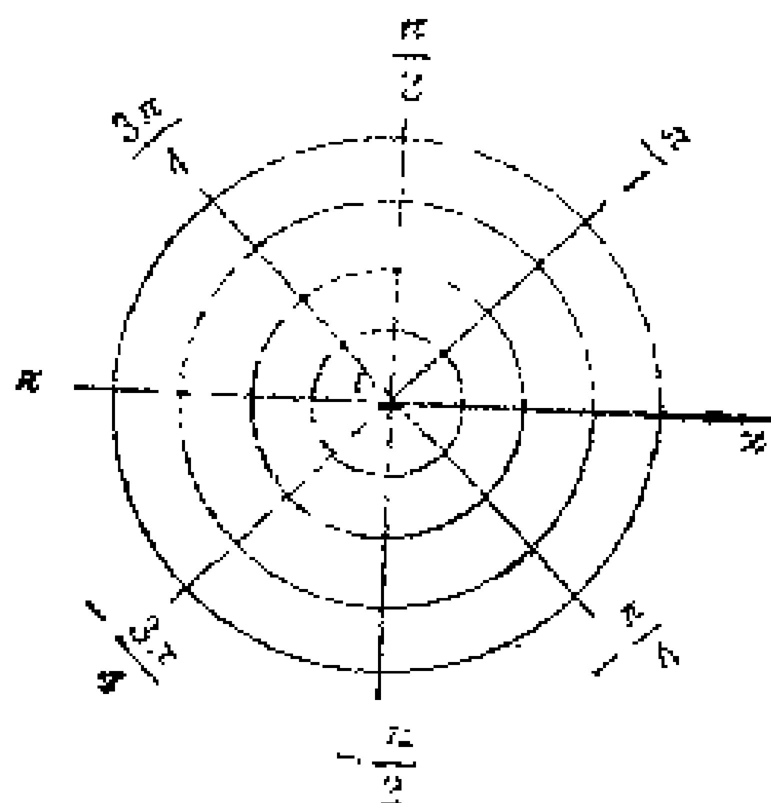


图 6

对于空间的极坐标系，情况就比较复杂了。在此坐标系中，空间任一点M（不在Oz轴上）与数组r，θ，φ一一对应。其中r表示线段$\overline{OM}$的长度，即任一点M到极点的距离。θ表示方位角，也可以说是由M点与Oz轴所决定的平面对于坐标面Oxz所转过的角度，由θ值的变化，构成过Oz轴的平面束；φ表示天顶角，即射线Oz与线段$\overline{OM}$的夹角。当φ取不同值时，就构成一组以极点为顶点的共顶点的圆锥。因此，导入空间极坐标系，事实上是由过射线Oz的平面束，与极点距离为r（r变化）的同心球及以极点为顶点的圆锥族所组成的。空间的每一点M，就是由同心球、平面束及共顶圆锥族确定，即三曲面交点（如图7）。有了这个直观形象，就不难由已知点的极坐标去寻找它的空间位置了。

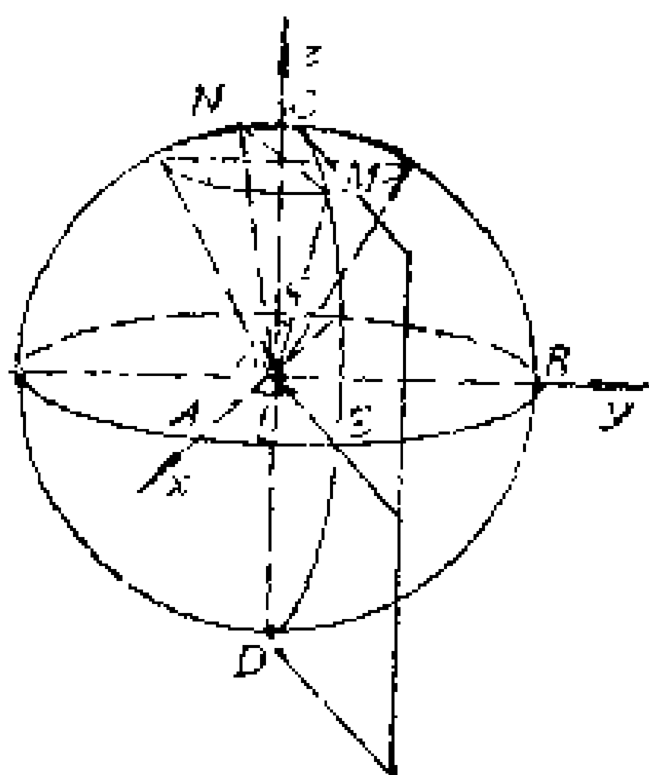


图 7

例如，已知点$M\left(2,\frac{\pi}{4},\right.$

$\left.\frac{\pi}{3}\right)$，画出点$M$的位置.

（1）画出半径为2的球；

（2）过Oz射线作与平面Oxz成$\theta=\frac{\pi}{4}$的平面得与球面交线$\widehat{CED}$；

（3）以O为顶点，作与Oz成$\frac{\pi}{3}$的圆锥面交$\widehat{CED}$于M，此点即为所求(图7)．此处要注意θ与φ的方向，一般地，方位角θ是指从极轴Ox到OE，φ是指从$\overline{OM}$到Oz.

另外，容易误解N也满足条件．其实N只满足$r=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，而$\theta=\pi+\frac{\pi}{4}$，显然不是点M的位置.

5　空间直角坐标系与空间极坐标系及柱面坐标系

我们知道，空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广，而空间极坐标系（或称球面坐标系）和柱面坐标系则是平面极坐标系的推广.

这三种坐标系的共同点是：都是用有序的三数组来确定空间点的位置．既然如此，同一点在不同坐标系中的坐标，在一定条件下可以互相转化.

虽然就本质上来看三者作用一样，但是也有不同之处．由于在三者之中，三数组的几何意义不同，这样就使直角坐标系中的点与有序三数组间是一一对应的．但由定义知，在空间极坐标系与柱面坐标系中，点与有序三数组一般不是一一对应的．尽管如此，在我们规定的条件下，在空间极坐标系与柱面坐标系中，仍然可使空间点与有序三数组建立一一对应关系．对此，下面以极坐标系为例予以说明.

设在空间极坐标系中一点M的坐标为$(r,\ \theta,\ \varphi)$，也可以表示为$(r,\theta+2k\pi,\varphi)$，还可以表示为$(r,\ \theta,\ \varphi+2k\pi)$或$(r,\theta+2k\pi,\varphi+2k\pi)$（其中$k$为整数）等等．这样对用解析法研究几何图形带来很大不便，所以，要保证一一对应关系，必须加

上限制条件：$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 和 $0<\varphi<\pi$。特别是要除去 Oz 轴上的点，因为 Oz 轴上的点与其坐标间仍不能保持一一对应关系。因此，在空间极坐标系中，讨论点与实数组间的对应关系，要特别注意这一点。

这里指出，本书今后主要用空间直角坐标系，但是在《数学分析》或其它学科中，有些问题应用极坐标系和柱面坐标系比较方便，如球面积分和柱面积分等。

6　图形与方程

关于空间解析几何学的基本问题，仍然和平面解析几何学的研究方法类似，一是给了图形求其方程；二是知道了图形的方程，通过对方程的讨论来研究图形的几何性质。

我们知道，在空间直角坐标系下，点与有序三数组是一一对应的。但是，一个代数方程并不一定总代表某一个曲面，然而这并不影响我们用解析法来研究几何问题，因为一个代数曲面总可以用一个方程表示出来。一个代数曲面，无非是一个动点按某种规律运动形成的，这个规律就是建立它的方程的基本条件。如一个球心在 $M(a, b, c)$ 点，半径为 R 的球面，可以看做一个动点 P，在运动过程中距点 M 的距离始终为 R，点 P 的变化（运动）是绝对的，但在运动中相对于点 M 的距离是不变的，这个变中的不变就是建立几何等式的条件，即

$$|MP|=R$$

此几何等式转化为方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{1}$$

其中，(x, y, z) 为动点 P 的坐标。导出这个方程虽然要用两点间距离公式，其实，它又可看做是圆的方程的自然推广。

另一方面，给出了一个图形的方程，就可以通过方程来研究几何图形的性质。例如若给出了方程（1），很明显地可以看出，它表示以点 $M(a, b, c)$ 为球心，以 R 为半径的球面。通过这个简单例子可知，用解析法研究几何图形是比较简便的。

四　小　结

1　在空间取定了具有共同原点和相同度量单位且排定了顺序的三个互相垂直的数轴，这样就建立了空间直角坐标系。

在直角坐标系中，空间里所有点与全体有序三数组之间建立了一一对应关系。每一点所对应的数组叫做该点的坐标。

因为每一点所对应的数组正好是该点在 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴上的射影所对应的数 x，y，z，所以这样的三个数也称为点M的坐标。

2　在空间里取定一条射线 Oz，过定点O作垂直于Oz的平面 Oxy。在平面 Oxy 上，以O为极点且以射线Ox为极轴建立极坐标系，这样也就在空间导入了极坐标系，或称球面坐标系。

在给定的空间极坐标系中，由点M所确定的有向线段 OM 的长度r，点M在平面 Oxy 上射影Q的极角 θ和射线 Oz与OM的夹角 φ，叫做点M的极坐标。其中 $0\leqslant r<\infty$，$-\infty<\theta<\infty$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$。

当极角取主值时，即当 $0\leqslant\theta<2\pi$ 时，除 Oz 轴上点之外，空间里所有点与其极坐标间建立了一一对应关系。

3　在空间直角坐标系 $Oxyz$ 的 Oxy 平面上，建立以原点O为极点，Ox 轴为极轴的极坐标系，这样也就在空间引入了柱面坐标系。

对于不在 Oz 轴上任意一点，它在 Oxy 面上射影为Q，用 ρ,θ 表示Q点的平面极坐标，用 z 的绝对值表示点Q到 M 的距离，则 ρ，θ，z 叫做M点的柱面坐标。其中，$0<\rho<\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$-\infty<z<\infty$。

除 Oz 轴上点外，空间里所有点与三数组 ρ，θ，z建立了一一对应关系。

Oz 轴上点的柱面坐标通常是不定的。

4　空间里点的坐标间的关系式

1）空间点的直角坐标与极坐标变换式：

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma\cos\theta\sin\varphi \\ y &= \gamma\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \gamma\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \\ \varphi &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\}$$

2）空间里点的直角坐标与柱面坐标变换式：

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

第二章　向量代数学习指导

一　本章要点

本章介绍了向量代数的基本知识，讲述了向量的定义及其表示方法；然后重点介绍了向量的线性运算（向量的加减法及数乘向量）和乘法运算（向量的数量积、向量积、混合积以及二重向量积）．此外，还提到了向量的某些应用．

在引入向量坐标之后，我们就能用数量去刻画向量的大小和方向，由于把向量作为计算对象，它具有和数量基本相同的运算规律，这就为我们用代数法研究几何问题提供了可能和方便；另一方面，对于向量也可以不通过坐标系，直接把代数运算引入到几何中来，解决某些问题有时也比较方便．所以向量代数在自然科学及工程技术中皆有比较广泛的应用．需要强调的是，向量代数是学习空间解析几何的基本工具，读者要予以足够的重视．

二　基本要求

1　理解并掌握向量及其坐标的基本概念；

2　理解和掌握向量的加减法、数乘、数量积、向量积、混合积以及二重向量积等基本概念；

3　要特别熟悉向量的坐标表示、几何性质和运算规律，能够熟练地利用向量坐标进行运算；

4　会判定向量的相互位置关系，并能用向量代数知识解

决某些问题。

三 内容分析

§1 向量的概念

本节主要讲述了向量的概念及其表示方法，同时，还给出了向量的模、单位向量、零向量、自由向量、相等向量、相反向量、共线向量以及共面向量等基本概念。这些都是向量代数中最重要的基本知识，需要很好掌握。

几点说明：

1 数量与向量

在我们所遇到的一些量中，有的在取定单位以后，用一个实数就完全能把它表示出来，如距离和体积等，这就是大家所熟知的数量（纯量）。另外还有一类量，只用大小（一个实数）不能完全把它们表示出来，还必须指出其方向才能完全确定。譬如说，从A地向东北方向走10里到达B地，这里所说的位移，显然是一个既有大小又有方向的量，类似的量很多，如力、力矩等，虽然它们的物理意义不一样，但从数学上来看，它们的共同特点是既有大小又有方向，因此就把这类量统称为向量（矢量）。

2 向量与有向线段

我们知道，几何中的有向线段不仅有长短，而且还有方向。因为有向线段最直观，所以也常用有向线段来表示向量，如用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示与它相等的向量$\vec{a}$（图8）。用模$|\overrightarrow{AB}|$来表示$\vec{a}$的大小，用端点顺序$A\longrightarrow B$来表示$\vec{a}$的方向。在今后的学习中，对于有向线段与向量是不加区别的。不过应当注意，如果一个向

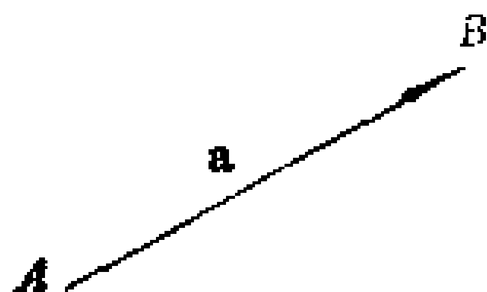


图 8

量表示一物理量时，它的模表示物理量的大小，它的方向表示物理量的方向，其中模的单位，可根据所表达的物理量而任意选取。例如，若取一厘米长来表示一公斤的力，则三公斤的力，就要用与力同方向的3厘米长的有向线段来表示。正因为有向线段可以表示向量，所以向量的大小(模)也叫做向量的长度。在今后的学习中，大家可以看到，用有向线段来表示向量，对于向量的研究会带来很多方便。

3　单位向量与零向量

单位向量与零向量都是常用的特殊向量。单位向量是模长为1的向量，因为它的坐标就是和它同方向的向量的方向余弦(见§7)，所以常常用它来表示方向，也就是说，谈到一个单位向量时，往往都是指与某一向量或某一方向具有相同方向的单位向量，如 Ox 轴正向的单位向量常记作$\vec{i}$，向量 $\vec{a}$ 的单位向量记作$\vec{a}^{\circ}$等。单位向量对于与它共线的向量来说，往往还能起到度量单位作用，总之与单位向量共线的一个向量可用这个单位向量表示出来，比如若一个向量 $\vec{a}$ 的模等于5，则直观上可以想象得到，$\vec{a}$ 可用其单位向量$\vec{a}^{\circ}$表示之，即 $\vec{a}=5\,\vec{a}^{\circ}$。

需要注意，共线的二单位向量不一定相等。这是因为，虽然这两个单位向量的模相等，但方向不一定相同，因为共线的两个向量方向可能相同，也可能相反。

零向量也是客观存在的，比如大小相等方向相反的两个力作用于物体同一点上，物体的位置显然不会变动，通常我们把这个合力看做零向量，并记作$\vec{O}$，以表示与数“0”相区别。零向量在向量运算及解决实际问题中都是不可缺少的。以后就会看到，只有定义了零向量才能说任意二向量相加或作向量积，其结果仍然都是向量。零向量的大小为0，其方向不定，这是因为，一个向量的指向（方向），是指由始点到终点的方向，而零向量的始点与终点重合，所以它的方向不定。也就是说，它的方向是任意的。在实际问题中，可以根据需要来选定它的方向。对此，以后在数量积和向量积的说明中，皆可看到实

例。

4　自由向量与径向量

自由向量与径向量二者既有区别又有联系。我们所研究的向量除了特别声明外，今后一般所说的向量都指自由向量，即在保持长度和方向不变的情况下，可以自由移动。这是因为，对于向量，我们只考虑大小和方向，所以用有向线段表示向量时，根据需要始点可任意选取。也就是说，长度相等方向相同的有向线段表示同一个向量。

我们已经知道，凡是始点选在坐标原点的向量都叫做径向量，也就是说，径向量的始点都固定在坐标原点。由于每个自由向量的始点皆可移到坐标原点，因此空间每个自由向量都与和它相等的径向量可以看成一个向量。而每个径向量终点的坐标就是它本身的坐标，所以可以把径向量看成与点一一对应。因此有关点的问题的讨论可以归结为向量的讨论，譬如可以把一条曲线或曲面看成径向量终点的轨迹。

§2　向量的加减法

本节主要给出了加法的定义、法则以及运算规律。其次，指出了其逆运算——向量减法。

几点说明：

1　三角形法则与平行四边形法则

向量加法也是从物理学中抽象出来的，如图 9 中的 O 点连续作两次位移，先后到达 O' 点与 O'' 点。若两次位移分别用向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示，两次位移所得到的向量 $\overrightarrow{OO''}$ 用向量 $\vec{c}$ 表示，则向量 $\vec{c}$ 就是向量 $\vec{a}$ 和向量 $\vec{b}$ 的合成，由于这种合成作为一种运算在形式上与实数相加很相象，所以把向量 $\vec{c}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，并且也采用实数相加的符号“+”，且记作

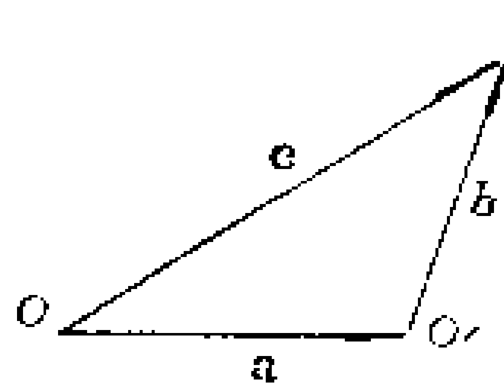


图 9

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

上面求二向量和的方法是采用三角形法则作图的. 从物理上可知，求二向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，也可采用平行四边形法则作图，这两种作图结果是一样的. 因而，二向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和也可用平行四边形法则来定义.

例 对任意二非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，按向量加减法法则，求其和与差.

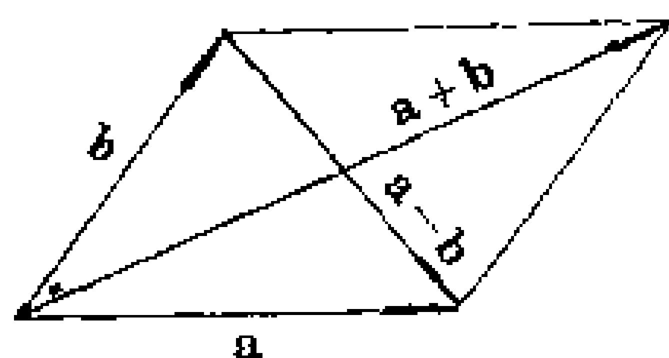


图 10

所得结果如图10所示. 在这里和与差都是图10中二向量$\vec{a},\vec{b}$为边的平行四边形的对角线向量，但需要区别哪条对角线是和，哪条对角线是差，并且还要注意对角线向量的方向.

2　向量加法与实数加法

1）$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

2）$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

3）交换律：

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

4）结合律：

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

以上四条按定义作图是显然成立的. 由此可见，如果将向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{0}$分别设为实数 a，b，c，0，则上述运算规律也对. 这就说明了，向量加法与实数加法运算规律相同，因面，向量加法可以象实数加法那样去演算.

3　向量运算中的等式与不等式

我们知道，实数和向量都有相等的概念. 此外，实数还可以比较大小，那么这种关系是否也可以推广到向量呢？我们说不可以. 按向量定义，我们知道

$$\vec{a} > b \text{ 或 } \vec{a} = 3$$

都没有意义。但向量的模是实数，所以

$$|\vec{a}| > |\vec{b}| \text{ 与 } |\vec{a}| = 3$$

皆有意义，这是向量与实数的重要区别。特别是，讲义中提到的三角形不等式

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b}|,$$

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| \leqslant |\vec{a} - \vec{b}|.$$

是有意义的，而且在证明不等式的某些问题中是有用的。

§3 向量与数的乘积

本节主要给出了数乘向量的定义及其运算规律。

几点说明：

1 数乘向量的几何意义

实数λ与向量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是一个向量，它的长度是$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$的方向是，当$\lambda > 0$时，与$\vec{a}$同向，否则与$\vec{a}$反向；当$\lambda = 0$，即$\lambda\vec{a} = \vec{0}$时，方向不定。根据上述定义，从直观上来看，$\lambda\vec{a}$就是把$\vec{a}$伸缩$|\lambda|$倍，若$\lambda < 0$，就表示还要改变方向（图11）。

2 数乘向量的运算规律

1）结合律

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

2）第一分配律

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

3）第二分配律

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

这里需要指出的是，上述规律对任意实数λ，μ及任意向

量$\vec{a}$，$\vec{b}$皆成立。特别是当λ，μ至少有一个为零或$\vec{a}$，$\vec{b}$至少有一个为零向量时，由向量加法及数乘向量可知，结论亦真。

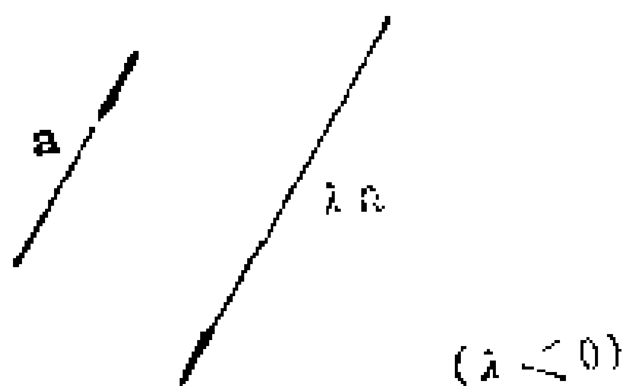


图 11

由上述规律可以看到，向量的线性运算完全可以象数量多项式那样去演算。

例 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，试证

$$(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}$$

证

$$(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\vec{a}+[\vec{b}+(-1)(\vec{a}-\vec{b})] \quad \text{（加法结合律）}$$

$$=\vec{a}+[\vec{b}+(-\vec{a})+\vec{b}] \quad \text{（数乘第一分配律）}$$

$$=\vec{a}+[\vec{b}+\vec{b}-\vec{a}] \quad \text{（加法交换律）}$$

$$=[\vec{a}+(-\vec{a})][\vec{b}(1+1)] \quad \text{（加法结合律）}$$

$$=2\vec{b}. \quad \text{（数乘第二分配律）}$$

可以看出，对上述向量多项式运算，如果把向量$\vec{a}$，$\vec{b}$分别看做实数a，b，则上面的演算恰是多项式演算。

§4 向量的线性关系

本节是前几节的代数概括，利用向量的线性运算给出了向量间的线性关系，其中主要定义了向量的线性相关与线性无关。

几点说明：

1 向量间线性关系的代数意义和几何意义。

我们已经知道，对于已给的n个向量$\vec{a_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，若存在不都等于零的n个数$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}$$

则称这n个向量是线性相关的，否则称为线性无关的．这是从代数角度给出了向量间线性相关（或线性无关）的定义．进一步说，所谓n个向量线性相关是指这n个向量间彼此有如下关系：n个向量中至少有一个向量，可用其余$n-1$个向量的一次向量多项式表示出来．反之，如果它们之间没有这种关系，就称它们是线性无关的．从几何上来看，两个向量是线性相关的，则它们总是共线的；三个向量若是线性相关的，则它们总是共面的．以上这些结论，反过来也成立．

2　一组向量的线性关系与其中部分向量的线性关系．

关于向量间线性关系，我们有如下命题：

若一组向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\cdots$，$\vec{a_n}$中有一部分向量线性相关，则这n个向量也线性相关．

证　对正整数$m(m<n)$，设$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\cdots$，$\vec{a_m}$线性相关，则有不同时为0的m个数$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$存在，使得

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_m \vec{a_m} = \vec{0},$$

故有　$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_m \vec{a_m} + 0 \cdot \vec{a_{m+1}} + \cdots + 0 \cdot \vec{a_n} = \vec{0}$，上式系数至少有一个不为零，因此$n$个向量也线性相关．

上述命题也可叙述为：

若向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\cdots$，$\vec{a_n}$线性无关，则其中部分向量也线性无关．

本命题有如下重要几何意义．

1）若二向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$不平行，则$\vec{a_1} \neq \vec{0}$，$\vec{a_2} \neq \vec{0}$．

2）若$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\vec{a_3}$三个向量共面，则它们每两个不平行．

§5　向量在轴上的射影

为了便于研究向量的坐标及向量的乘法运算，并对它们进

行几何解释，本节主要给出了向量在轴上射影的定义及其基本性质。

几点说明：

1　射影向量与向量的射影

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的射影向量，是指过空间两点 A, B 作垂直于轴 u 的平面 α, β，这二平面与轴 u 交点分别为 A', B'，则向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 即为 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的射影向量（图12）．向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的射影是指向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 在轴 u 上的代数值．这里所谓"轴"是指规定了方向的直线．所谓"代数值"就是平面解析几何中的有向线段所对应的数，即表示 $\overrightarrow{A'B'}$ 长度的数，再加上表示 $\overrightarrow{A'B'}$ 方向的正（负）号，若 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向与轴 u 方向一致，则向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 在轴 u 上代数值为正，否则为负．

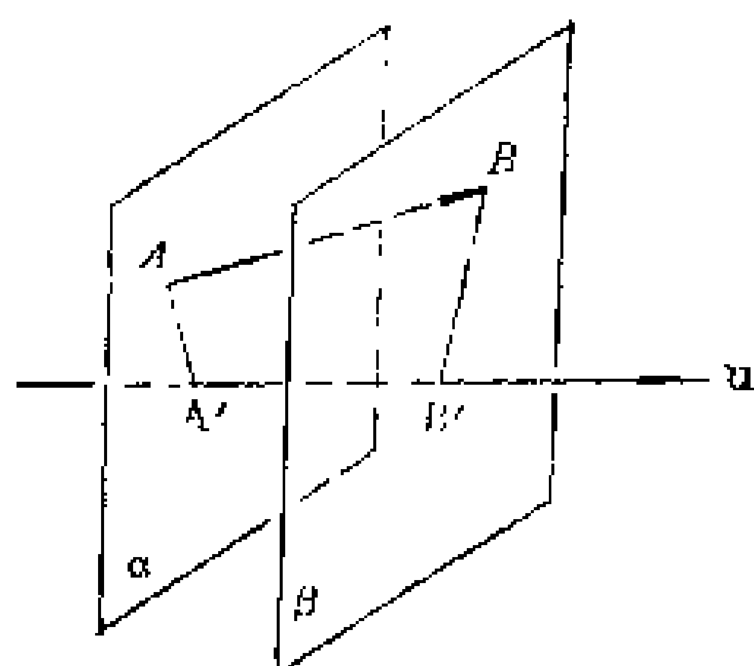


图 12

2　两个公式

$$射_u(\vec{b}+\vec{c})=射_u\vec{b}+射_u\vec{c},$$

$$射_u\lambda\vec{a}=\lambda射_u\vec{a}.$$

这两个公式分别说明了，二向量和在轴上的射影等于每个向量在轴上射影之和；数乘向量在轴上射影等于向量在轴上射影再乘以这个数．这里所要指出的是，不要误认为前一个公式是由分配律得来的，后一个公式是由交换律得来的，这种看法是错误的．因为射影的记号"射$_u\vec{a}$"是不可分割的整体，只要注意讲义中公式的证明就不会产生误解．

§6　向量的坐标

向量虽然不是数，但却可以象数那样去运算．那末，向量

与数以及它们的运算之间有什么关系呢?为了明确这种关系，本节引入了向量坐标的概念，从而使向量与有序三数组建立了一一对应关系，把向量用数来表示，使向量的运算转化为坐标间的数量运算。

例 试证三个向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$ 共面的必要充分条件是它们的坐标行列式为 0 .

证 因为已知三个向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 共面的必要充分条件是存在不同时为零的三个数 λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}\text{。}$$

根据向量坐标的定义已知，一个向量的坐标是其按基本向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分解的系数。所以可设

$$\vec{a}_i = x_i \vec{j} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (*)$$

即

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

若把 λ_1，λ_2，λ_3 看成未知数，则此方程组有不为零的解的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

由本例可见，虽然三个向量共面是几何问题，但可用熟知的代数知识予以解决。

这里需要强调的是，(*)式是把向量的各种运算转化为数量运算的基础，所以一定要熟记。

§7 向量的方向余弦

为了确定向量的方向，易于进行运算，本节定义了方向余

弦，并且讨论了方向余弦的性质。此外，还指出了用方向数也可确定向量的方向。

几点说明：

1　方向角与方向余弦

我们知道，向量$\vec{a}$与坐标轴 Ox, Oy, Oz 的正方向的夹角 α, β, γ 叫做向量$\vec{a}$的方向角，其中，$0 \leqslant \alpha$, β, $\gamma \leqslant \pi$；它们的余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 叫做向量$\vec{a}$的方向余弦。方向余弦之所以能确定向量的方向，这是因为，当 $0 \leqslant \alpha$, β, $\gamma \leqslant \pi$, 及 $-1 \leqslant \cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma \leqslant 1$ 时，在这个范围内的角度和其余弦值之间构成一一对应关系，就是说，已知向量$\vec{a}$在0到π之间的一个方向角时，就能在-1到1之间得到唯一与之对应的一个余弦值。反之，已知向量$\vec{a}$在-1到1之间的一个余弦值，就能在0到π之间得到唯一与之对应的一个方向角，所以方向余弦与方向角一样，也能确定向量的方向，而且由于它的方向余弦易于求得，易于运算，所以常用它表示向量的方向。例如，模为1的径向量的终点轨迹形成一个球面，即所谓单位球面，所以方向余弦也可以说是用一个单位球面上的点来表示方向。在天文学上就是如此，用一个所谓天球上的点来表示星体的方位。

2　方向余弦与方向数

方向数同方向余弦一样，也可用来确定向量的方向。在日常生活中我们知道，从一点顺着一个方向看去，所能看到的点形成一条射线OP，以O为始点，以 OP 上任意一点为终点的所有向量皆与射线 OP有相同方向。我们设一向量$\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为这一方向的单位向量，显然其坐标即为这一方向的方向余弦。如果将$\overrightarrow{OA}$坐标乘上所有正数，则得到这一方向所有向量之坐标，每一组坐标皆可表示这一方向，所以都叫做这个方向的一组方向数。可见方向数是与方向余弦成比例的数，因此它是方向余弦的推广。反过来，知道了任意一组方向数，它所代表的方向的方向余弦就容易求得了。不过，一个方向的

方向余弦是唯一确定的，而方向数则有无穷多组。而且，方向数不一定是方向余弦，而方向余弦总可以看做方向数。显然，在空间中，每一个方向的方向数是一组不同时为 0 的有序三数组。

例 1　若角$\alpha=45°$，$\beta=135°$，$\gamma=60°$，问 α，β，γ 能否构成某一方向的方向角？

解　我们已知，任一方向的方向余弦的平方和公式为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma^2=1.$$

而

$$\cos^2 45°+\cos^2 135°+\cos 60°$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=1\frac{1}{4}\neq 1.$$

所以，上式不满足平方和公式，因此45°，135°，60°不会构成某一方向的方向角。这就是说，并不是任何三个角都能构成某一方向的方向角，或者说，并不是任何三个角的余弦都构成某一方向的方向余弦。

例 2　试求以cos45°，cos135°，cos60° 为方向数的向量$\vec{a}$的方向余弦。

解　任何一组有序三数组（实数组），都是以原点为始点，以这三个数为坐标的点为终点的径向量的一组方向数，所以，以cos45°，cos135°，cos60° 为方向数的向量 $\vec{a}$ 的方向余弦可以求出。由方向余弦性质，可设

$$(\lambda\cos 45°)^2+(\lambda\cos 135°)^2+(\lambda\cos 60°)^2=1$$

即

$$\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2=1$$

则

$$\lambda^2=\frac{4}{5},\ \lambda=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

因为λ应取正数，所以，$\lambda=\frac{2}{\sqrt{5}}$

因而

$$\vec{a}^{\circ}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right\}\times\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$=\left\{\frac{2}{\sqrt{10}},\ -\frac{2}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

所以$\left\{\frac{2}{\sqrt{10}},\ -\frac{2}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$就是所求的方向余弦。

上述两个例子说明：45°，135°，60°，虽然不构成某一方向的方向角，它们的余弦也不构成这个方向的方向余弦，但它们作为方向数可确定一个方向。

§8 向量的数量积

本节给出了向量的数量积的定义，几何性质，运算规律以及坐标表示。由于数量积可以解决度量问题中两个最基本的量——长度和角度，所以，数量积是比较重要的概念。

几点说明：

1 数量积的引出

由数量积的定义知道，两个向量作数量积得到的结果是与它们本身截然不同的量——数量。对此，我们以物理学上力所作的功为例加以说明。一质点M在力$\vec{a}$的作用下的位移为$\vec{b}$，则力所作的功等于它在位移方向的射影，即为$|\vec{a}|\cos\varphi$ ($\varphi=\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle$)，再乘以位移的距离$|\vec{b}|$，即

$$W=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

这里$\vec{a}$，$\vec{b}$为向量，而功W只有大小没有方向，即W为一数量。当$0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$时，$W$为正数；当$\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$W=0$；当

$\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$时，$W$为负数。这类例子在物理学中很多。在数学中，把由二向量$\vec{a}$和$\vec{b}$所确定的三个数$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$和$\cos\varphi$相乘得到的数量记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，并把按上述方法由两个向量来确定一个实数的运算作为一种法则，抽象概括为二向量的一种乘法运算——数量积的运算。

利用数量积便于证明某些不等式。

例　试证$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{3}a_i^2\sum_{i=1}^{3}b_i^2$，

证　设$\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$。

因为　$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\theta\leqslant|\vec{a}|\ |\vec{b}|$，$(0\leqslant\cos\theta\leqslant1)$　（1）

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{3}a_i^2\sum_{i=1}^{3}b_i^2$$

这个不等式可推广为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\qquad(2)$$

（2）式为柯西—施瓦尔茨不等式，在“拓扑学”等学科中有广泛的应用。

2　关于a^2与$\vec{a}^2$

我们知道，对于实数a及向量$\vec{a}$，虽然a^2与$\vec{a}^2$都是实数，然而，却不都表示乘方运算，其中a^2表示a的平方，但是向量运算没有引入乘方的概念。也就是说数量乘方概念不能推广到“向量乘方”。所以$\vec{a}^2$不是向量$\vec{a}$的平方，它只是一个简便记号，表示向量$\vec{a}$与自身作数量积。推而广之，$\vec{a}^n$及$\sqrt[n]{\vec{a}}$皆没意义，其中n为大于2的正整数。

3　关于二向量$\vec{a}$和$\vec{b}$互相垂直的必要充分条件是$\vec{a}\vec{b}=0$。

这个命题是数量积的一条重要性质。这里首先指出，此命

题对任意的向量$\vec{a}$和$\vec{b}$皆成立，特别是，当向量$\vec{a}$，$\vec{b}$至少之一为零向量时，此命题亦真。比如，设$\vec{a}=\vec{0}$，由于零向量方向任意取，此时，可认为$\vec{a}$的方向与$\vec{b}$垂直。另外，这条性质，在下一章中十分有用，常用来判别二直线、二平面是否垂直，以及直线与平面是否平行，因为这些问题都归结为判别二向量是否垂直的问题。

例 证明三角形三高线交于一点。

证 设 P 是$\triangle ABC$内一点，令$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$，当$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$时，有

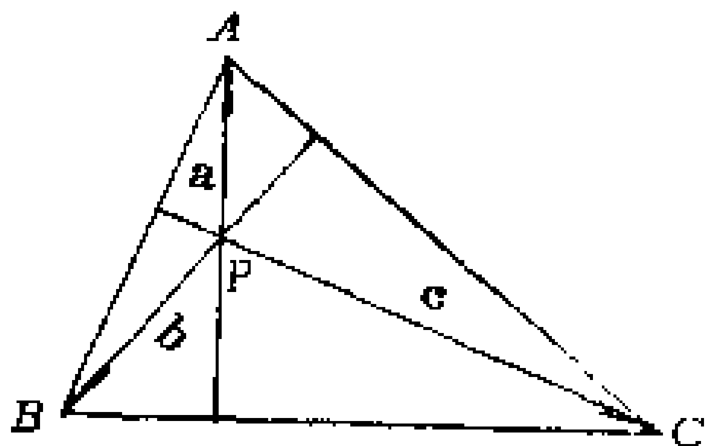


图 13

$$\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=0,$$

$$\vec{b}(\vec{a}-\vec{c})=0,$$

二式相加得

$$\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}=0 \text{ 或 } \vec{c}(\vec{a}-\vec{b})=0.$$

这表示$\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$，所以三高线共点（图13）。

由此例可知，证明某些初等几何较难的问题，若用向量知识来处理就变得容易了，所以用向量解决某些问题确有优越性。

§9 向量的向量积

两个向量的向量积是利用向量来研究度量问题的又一个重要的概念。本节主要给出了向量积的定义，几何性质，运算规律以及坐标表示。

几点说明：

1 向量积的引出

对向量积的由来，我们用物理量“力矩”为例加以说明（图14）。

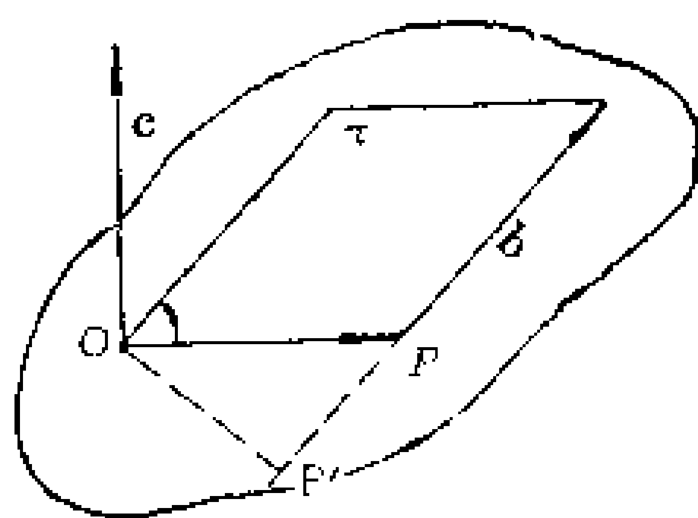


图 11

设想在水平面 π 上，有一根棍子，它的一端始终在定点 O。π 上另有一个力 $\vec{b}$ 作用在它的另一端 P 上，力的效用是使 P 绕 O 点转动，转动的轴线垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{b}$。$\overrightarrow{OP}$ 在力作用下，除了有转动快慢之分外，还有逆时针或顺时针两个方向的区别．由物理学可知，转动快慢用力矩大小表示为：

力矩大小 = 力臂 × 力的大小 = $|\overrightarrow{OP}|\ |\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{c}|$，其中 $\varphi = \langle\overrightarrow{OP},\ \vec{b}\rangle$。

转动的方向也就是力矩的方向：

当 $\overrightarrow{OP}$ 逆时针旋转时，这个方向就用转动轴线向上方向来表示，即 $\overrightarrow{OP}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 形成右手系，否则就用轴线向下方向表示．

由上面分析可知，向量 $\vec{c}$ 由向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{b}$ 完全确定．象力矩 $\vec{c}$ 这样被两个已知向量按上述方法所确定，在物理学上很多，数学上把这种办法作为一个运算法则，称为求向量的向量积运算，其结果称为向量积。

2　关于二向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行的必要充分条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$．

这里指出，上述命题对任意的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 皆成立．当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 中至少有一个为零向量时，这个零向量作为与另一向量平行的向量。

上述命题也可叙述为：二向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行的必要充分条件是 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$．这条性质下一章中常用．因为 $\vec{a}\times\vec{b}$ 既垂直于 $\vec{a}$ 又垂直于 $\vec{b}$，故 $\vec{a}\times\vec{b}$ 可作为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所在平面的法向量。

3　向量积运算规律

1）反交换律

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

2）结合律

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$$

3）分配律

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

这些规律说明了，外积基本上也可象数量多项式那样去演算，不过要注意，交换因子时变号。

例1 证明$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$，并说明其几何意义。

证

$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})&=\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b})\\&=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}\\&\quad-\vec{b}\times\vec{b}\\&=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}\\&=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}\\&=2(\vec{a}\times\vec{b}).\end{aligned}$$

上面公式说明了，平行四边形面积的2倍等于它的两条对角线作边的平行四边形的面积。

例2 已知三向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$不共线，试从等式$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$推出：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$。

证 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$。据向量积定义可知，向量$\vec{d}$垂直于向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，所以向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面，即它们线性相关，也就是

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}\qquad(1)$$

用$\vec{a}$与$\vec{b}$分别与（1）式作向量积得

$$\mu\vec{a}\times\vec{b}+\nu\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0},\qquad\lambda\vec{b}\times\vec{a}+\nu\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0},$$

但已知

$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$，由此得$\lambda=\mu=\nu$。再由（1）式得

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

4　坐标表达式

若　$\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$

则有　$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$（2）

为便于记忆，记作行列式形式：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

如将（3）式按行列式展开法展开则得（2）式。这里需要指出的是，（3）式右端并不是行列式，因为行列式中每个元素必须都为数量，这里仅是借用行列式的记号而已。

§10　向量的混合积

三个向量的混合积是在向量的数量积和向量积的基础上引进的，本节主要研究了混合积的定义，几何性质，运算规律及坐标表达式。

这部分内容比较好理解，讲义中写得比较详尽，有关注意问题可见后面小节，在此不重述。

我们为了利用简捷的方法来证明向量积的分配律，先看下面例1．

例1　若向量$\vec{a}$同时垂直于三个不共面的向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$，则$\vec{a}=\vec{0}$．

证　若$\vec{a}\neq\vec{0}$，则因$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$同时垂直于$\vec{a}$，所以$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$共面。这与题设相矛盾。因此，$\vec{a}=\vec{0}$．

例2　试证$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$．

证　设$\vec{r}$为任意向量，由$\vec{a}_1(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)=(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\vec{a}_3$及数量积分配律有

$$\vec{r}[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]=(\vec{r}\times\vec{a})(\vec{b}+\vec{c})$$

$$=(\vec{r}\times\vec{a})\vec{b}+(\vec{r}\times\vec{a})\vec{c}$$

$$=\vec{r}(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{r}(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=\vec{r}[(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})]$$

移项有

$$\vec{r}[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}]=\vec{0} \qquad (1)$$

因为向量$\vec{r}$是任意的，所以取三个不共面向量$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$ 取代（1）中$\vec{r}$，（1）显然成立，据例1有

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$$

移项得

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

这里指出，向量积分配律的证明在讲义中是很麻烦的，读者在学习这个内容时，可暂时将结论承认下来，这样并不影响后面知识的学习，待学了向量的混合积的知识后，即可用上面方法比较简单地予以证明.

§11 二重向量积

向量的二重向量积实际上就是向量积，只不过是三个向量两次作向量积的结果. 本节是以上所讲的向量代数知识的一个应用. 其中有

1 二重向量积的展开式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b})\vec{c}.$$

2 拉格朗日恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d})-(\vec{a}\,\vec{d})(\vec{b}\,\vec{c}).$$

它们在后继课《微分几何》中常常用到.

例 把 $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]\vec{d}$ 和 $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]\times\vec{d}$ 用数量积、向量积和混合积表示出来。

解 1) $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]\vec{d}$

$$=[(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}]\vec{d}$$

$$=(\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d})-(\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a}\,\vec{d})。$$

2) $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]\times\vec{d}$

$$=[(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}]\vec{c}-(\vec{c}\,\vec{d})(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}-(\vec{c}\,\vec{d})(\vec{a}\times\vec{b})。$$

四 小 结

为了便于读者的学习，我们把本章的主要内容概括如下：

1 向量的加减法

（1）加法：三角形法则和平行四边形法则。

（2）减法（加法逆运算）：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。

2 数与向量的乘法

（1）定义：数乘向量 $\lambda\vec{a}$

$$\begin{cases}\text{模：} & |\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}| \\ \text{方向：} & \begin{cases}\lambda>0,\ \lambda\vec{a}\text{ 与 }\vec{a}\text{ 方向相同，} \\ \lambda<0,\ \lambda\vec{a}\text{ 与 }\vec{a}\text{ 方向相反。}\end{cases}\end{cases}$$

$\vec{a}$ 的单位向量 $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

（2）几何意义

i) $\vec{a}\parallel\vec{b}\Longleftrightarrow$ 存在实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$；

ii) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ 存在实数 λ，μ 使

$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$。

3　向量在轴上的射影

（1）向量 $\vec{a}$ 在轴 u 上的射影是个数，由

$$射_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi,\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)。$$

确定，其中 φ 是向量 $\vec{a}$ 与轴 u 的夹角。

（2）若 $\vec{a}=\vec{b}$，则射$_u\vec{a}$ = 射$_u\vec{b}$；

（3）射$_u(\vec{a}+\vec{b})$ = 射$_u\vec{a}$ + 射$_u\vec{b}$；

（4）射$_u\lambda\vec{a}=\lambda$射$_u\vec{a}$。

4　向量的坐标、模、方向余弦之间的关系

（1）空间任何向量 $\vec{a}$ 都能按基本向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分解为三个向量之和，系数为 $\vec{a}$ 之坐标：

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\{x,\ y,\ z\}。$$

（2）$x=|\vec{a}|\cos\alpha,\ y=|\vec{a}|\cos\beta, z=|\vec{a}|\cos\gamma$；

（3）$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

（4）$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec{a}|}$；

（5）$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。

5　两个向量的数量积

（1）定义：$\vec{a}\,\vec{b}$ = 数 = $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

（2）几何意义

i) 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的射影：射$_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$；

ii) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$；

iii) $\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\,\vec{b}=0$；

iv) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$。

（3）运算规律

i) 交换律：$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$；

ii) 结合律：$(\lambda\vec{a})(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)(\vec{a}\vec{b})$；

iii) 分配律：$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$。

（4）坐标表达式

若$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$，

则 $\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。

6　两个向量的向量积

（1）定义：$\vec{a}\times\vec{b}=$向量

$$=\begin{cases}\text{模：} |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\\ \text{方向：}\begin{cases}\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\text{与}\vec{b},\\ \vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\text{满足右手系。}\end{cases}\end{cases}$$

（2）几何意义

i) $|\vec{a}\times\vec{b}|=$以$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形面积；

ii) $\vec{a}\parallel\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$；

iii) $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

（3）运算规律

i) 反交换律：$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$；

ii) 结合律：$(\lambda\vec{a})(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)(\vec{a}\times\vec{b})$；

iii) 分配律：$\begin{cases}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\\ (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}\end{cases}$。

（4）坐标表达式

若$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

7　三个向量的混合积

（1）定义：$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ = 数 = 其中两个向量先作向量积，再和第三个向量作数量积。

（2）几何意义

$|(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})|$ = 以这三个向量为棱所构成的平行六面体体积．

（3）其它性质

i）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为右旋系 $\Longleftrightarrow (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})>0$，

　　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为左旋系 $\Longleftrightarrow (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})<0$；

ii）$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}$；

iii）$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\vec{c}$；

iv）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 中有二相同向量，则 $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=0$。

（4）坐标表达式

若 $\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,\ y_3,\ z_3\}$，

则 $$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

（5）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=0$。

8　二重向量积

（1）定义：$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ = 向量 = 其中前两个向量先作向量积，然后再和第三个向量作向量积。

（2）基本公式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}.$$

（3）坐标表达式

若 $\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,\ y_3,\ z_3\}$，

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\{x,\ y,\ z\}$，

则

$$x = x_2(\vec{a}\,\vec{c}) - x_1(\vec{b}\,\vec{c}),$$

$$y = y_2(\vec{a}\,\vec{c}) - y_1(\vec{b}\,\vec{c}),$$

$$z = z_2(\vec{a}\,\vec{c}) - z_1(\vec{b}\,\vec{c}).$$

（4） 一点注意

二重向量积与相乘顺序有关，一般情况下

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

第三章　平面和直线学习指导

一　本章要点

本章是以向量代数为主要工具，研究空间最基本最简单的图形——平面和直线。讨论作为一次曲面的平面与三元一次方程之间的联系。还研究了平面与直线的各种形式的方程和点与平面、平面与平面、点与直线、直线与直线以及直线与平面的位置关系。

二　基本要求

1　为了学好本章有关的知识，应当很好掌握、运用第二章向量代数的内容；

2　要很好理解平面与三元一次方程之间的相互关系；

3　能够按照已给的条件导出平面和直线的各种方程，并明确方程中各参数的几何意义。

4　能够导出和应用点、直线、平面之间的有关距离、夹角、平行、垂直的公式和条件，并能解决一些实际问题。

三　内容分析

关于全章的内容分析打算分三个方面讨论：平面、直线以及点、直线、平面的位置关系。

§1 平面的一般方程

本节主要证明了平面与三元一次方程之间的所谓基本定理，详细地讨论了三元一次方程一些特别情形所确定的平面的位置.

几点说明：

1 关于平面的基本定理

所谓平面的基本定理就是在空间直角坐标系中，每个平面的方程都是一次的；反之，每个一次方程都表示一个平面.

在这个定理的证明过程中，容易看出两种情况：首先是，作为点的轨迹的几何图形平面与三元一次方程建立了对应. 有了这种对应才能通过三元一次方程来研究平面的性质，因而轨迹与方程的这种对应具有更普遍的意义. 因为在解析几何中，必须建立两种基本对应，一是点与数组的对应，二是作为轨迹的几何图形与代数方程的对应. 其次是，我们看到，在导出平面的方程时，首先导出了它的向量方程 $\vec{n}\,\vec{r}+D=0$，然后过渡到坐标方程 $Ax+By+Cz+D=0$. 这样做既保持了向量方程简明的优越性，也考虑到坐标方程的实用性.

2 关于 $Ax+By+Cz+D=0$ 的某些特别情形

关于平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的某些特别情形的讨论，必须首先着眼于系数 A, B, C. 这是因为它们是平面法向量 $\vec{n}$ 的坐标. 很显然，它们不能同时为零. 如果同时为零，方程就不是一次的了. 那么，只能是某一个或某两个为零，这样就可知道法向量 $\vec{n}$ 与一个或两个坐标轴的垂直关系，因而也就可以判断出平面的位置了. 至于 $D=0$，显然平面是通过坐标原点的.

例 试指出下列平面的位置特征.

（1） $3x-5z=0$

（2） $9y-2=0$

解 （1）因为平面的法向量为 $\vec{n}=\{3,0,-5\}$，所以 $\vec{n}$ 垂直于 Oy 轴，即平面平行于 Oy 轴．又因 $D=0$，所以平面通过原点，因此，平面过 Oy 轴．

（2）因为平面的法向量为 $\vec{n}=\{0,9,0\}$，即 $\vec{n}$ 垂直于 Ox 轴和 Oz 轴，因此平面平行于 Oxz 坐标面．又因 $D\neq 0$，所以平面不过原点，而与 Oy 轴交于点 $\left(0,\frac{2}{9},0\right)$．

§2 三点确定的平面方程

我们知道在立体几何中，不在一直线上的三个点能确定一个平面．在空间解析几何中，已知平面上三点的坐标，也可以确定一个平面的方程．

本节就是在已知三点坐标的条件下，来推导平面方程的．基本想法是：取平面上任意一点 M，设其坐标为 (x,y,z)，然后由这四点构成三个向量，根据三向量共面的条件就可推出三点确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

由此，容易推得平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

一点说明：

对截距式方程，要注意掌握 a,b,c 的几何意义，它们表示平面在 Ox,Oy,Oz 轴上的截距分别是 a,b,c．通过这种方程的系数容易看出平面在空间直角坐标系中的位置．

例 试作一平面，经过点 $P(7,-5,1)$，且在各坐标轴的正向上所截线段相等．

解 从分析题意可知，平面与三坐标轴相交，设所得截距

皆为 a，则平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

因为平面通过定点$P(7,-5,1)$，即P的坐标满足方程，所以下式成立

$$\frac{7}{a}+\frac{-5}{a}+\frac{1}{a}=1$$

容易求出 $a=3$,所以所求平面方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$$

或者写为

$$x+y+z-3=0.$$

§3 平面的法线式方程

平面的法线式方程可以看做是平面解析几何里直线的法线式方程在空间直角坐标系的一个推广. 它的主要作用在于解决点到平面的距离问题.

我们已知，如果从原点到已知平面的垂线长为 p，平面的法向量的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则平面的法线式方程为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

几点说明:

1 对这种方程，要注意理解流动坐标的系数$\cos\alpha$，$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是平面的法向量的方向余弦或单位法向量的坐标. 常数项p是原点到平面的距离. 要熟练地掌握，将平面的一般方程化成平面的法线式方程的基本方法. 要特别注意，法化因子的符号与平面的一般方程的常数项的符号相反.

2 如果想把平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

化为法线式方程，必须乘它的法化因子

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

而且法线式方程的系数可用一般方程的系数表出如下

$$\cos\alpha=\mu A=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\mu\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\mu C=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ p=-\mu D=\frac{D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例　求垂直于平面$2x-y+2z-9=0$的直线的方向余弦。

解　从题意可知，垂直于平面的直线必平行于平面的法线，所以法线的方向余弦可以看做所求直线的方向余弦，由上述公式可得

$$\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\pm\frac{2}{3}$$

$$\cos\beta=\pm\frac{-1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\mp\frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\pm\frac{2}{3}$$

由法化因子的符号可知 $\cos\alpha,\cos\gamma$ 应取正值，而 $\cos\beta$应取负值。所以直线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{1}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3}$$

但作为垂直于已知平面的直线的方向余弦，也可取$\cos\alpha=-\frac{2}{3}$，$\cos\beta=\frac{1}{3}$，$\cos\gamma=-\frac{2}{3}$。

§4　点到平面的距离

上面已经说过，平面的法线式方程主要是用来解决点到平面的距离问题。求已知点 M' 到已知平面$Ax+By+Cz+D=0$

的距离可分下面几个步骤：

1　将平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 化成法线式方程；

2　将已知 M' 点的流动坐标代入法线式方程的左端，得到离差 δ；

3　取离差的绝对值，就得到点到平面的距离。

几点说明：

1　这里要注意离差 δ 的符号的几何意义。离差为正值，说明已知点 M' 与原点在已知平面的异侧。如果离差 δ 取负值，说明已知点 M' 与原点在已知平面的同侧。用此性质可以判断原点在二相交平面哪一个夹角的内部。

2　由点到平面距离的求法，容易解决下面两个问题

1．求到二平行平面等距离的点的轨迹方程；

2．求两个相交平面的等分角面的方程。

例1　求与平面 $x+y-2z-1=0$ 和平面 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面方程。

解　从平面方程的系数可以看出，二平面的法向量的坐标是相同的，所以二平面平行。又由题设可知所求平面应当平行于已知二平面。故所求平面方程可写为

$$x+y-2z+D=0$$

其中 D 是待定的系数。

由条件可知，所求平面上的点到已知二平面的距离是相等的，故得

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{D}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}-\frac{D}{\sqrt{6}}$$

因而　　$2D=2$

即　　　$D=1$

所以，所求平面方程为　$x+y-2z+1=0$。

例2　试求二平面 $2x-y+z=7$，$x+y+2z=11$ 构成二面角的平分面方程。

解　先将已知二平面一般方程化成法线式方程为

$$\frac{2}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z-\frac{7}{\sqrt{6}}=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z-\frac{11}{\sqrt{6}}=0.$$

因所求平面是已知二平面夹角的平分面，由平分面的性质可知，它上面的点到已知二平面的距离相等.

若设 $M(x,y,z)$ 为平分面上的点，它到二平面的距离必相等，所以它必满足等式

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z-\frac{7}{\sqrt{6}}\right|$$
$$=\left|\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z-\frac{11}{\sqrt{6}}\right|$$

或写成

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z-\frac{7}{\sqrt{6}}\right)$$
$$=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z-\frac{11}{\sqrt{6}}\right)$$

整理后可得

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y-\frac{1}{\sqrt{6}}z+\frac{4}{\sqrt{6}}=0$$

和

$$\frac{3}{\sqrt{6}}x+\frac{3}{\sqrt{6}}z-\frac{18}{\sqrt{6}}=0$$

即得两个角平分面方程为

$$x-2y-z+4=0 \text{ 和 } x+z-6=0.$$

§5 两个平面的夹角

本节给出了两个平面夹角的定义，讨论了两个平面的位置关系，特别是给出了两个平面平行、垂直、重合的条件.

设已知二平面的方程为

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

由此可知，二平面的法向量分别为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$，$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$。由图15可以看出二平面法向量的夹角就是二平面的夹角。

若设二平面夹角为 φ，则

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

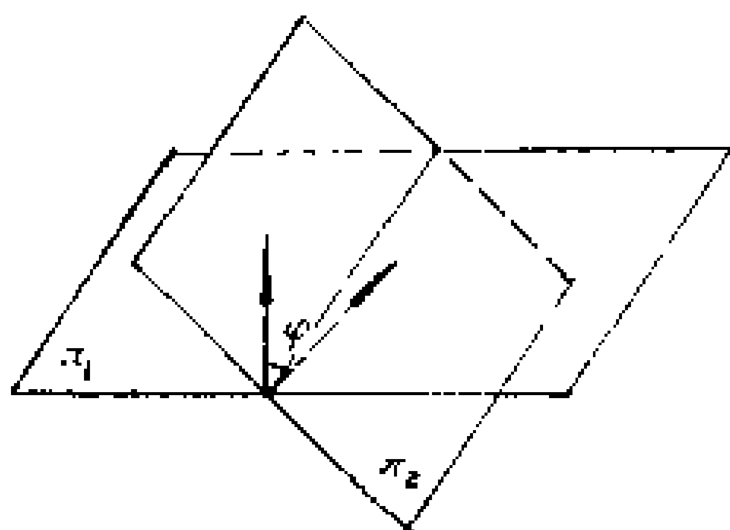


图 15

如取锐角，取 $\cos\varphi$ 的绝对值所确定的角即可。

由此又可推出二平面互相垂直的条件为

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

平行的条件为

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

重合的条件为

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

由以上给出的条件可以看出，两个平面的位置关系常常通过它们的法向量的位置关系来确定。

一点说明：

在解决有关两个平面位置关系的问题中，使用待定系数法是很方便的。

例1　求通过点(0, −1, 0)与点(0, 0, 1)且与 Oxy 平面交成60°角的平面方程。

解　设所求方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

由于平面通过二已知点，即二已知点的坐标满足方程，将二已知点坐标代入方程后，可得

$$-B-D=0 \quad (1)$$

$$C+D=0 \quad (2)$$

又平面与 Oxy 平面交成60°角，由夹角公式可得

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos 60°=\frac{1}{2}$$

化简后得

$$A^2+B^2-3C^2=0 \quad (3)$$

从上面(1)，(2)，(3)式解出 A、B、C，并用 D 表示，得

$$B=D \quad C=-D \quad A=\pm\sqrt{2}D$$

将此三式代入平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，等式两边除以 D，即得所求平面方程为

$$\sqrt{2}x+y-z+1=0 \text{和} -\sqrt{2}x+y-z+1=0$$

例 2 求通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且平行于平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

的平面方程。

解 因所求平面与已知平面平行，所以可设此平面方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0.$$

因平面通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，故将点坐标代入方程后，满足方程

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D=0$$

即 $$D=-(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0)$$

故得所求平面方程为

$$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0.$$

§6 三个平面的交点

这一节给出了三个平面交于一点的条件，并讨论了三个平面的位置关系。

几点说明：

1 讨论下列三个平面

$$\left.\begin{array}{ll}\pi_1: & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ \pi_3: & A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

有无交点的问题，实际上就是讨论由三个平面方程所构成的方程组是否有解的问题．当方程组（1）有唯一的一组解时，三个平面有唯一的交点．这时，（1）的系数行列式不等于零或者说三个平面的法向量不共面，即

$$(\vec{n}_1 \ \vec{n}_2 \ \vec{n}_3) \neq 0$$

或
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

2　空间三个平面的位置关系除掉上述情况外，还有其他情况，如三个平面有无穷多个交点；三个平面根本没有公共点；三个平面中，每两个平面有无穷多个公共点等情况．这些情况，方程组（1）的三阶行列式等于零．讨论三个平面位置关系时，如果矩阵不熟悉，可利用行列式，或者分别讨论每两平面的位置关系，综合起来就可知道三个平面的位置关系．

例　讨论下列三个平面间的位置关系

π_1: $5x+3z=0$

π_2: $x-2y-z=8$

π_3: $-2x+4y+2z=5$

解　由系数行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

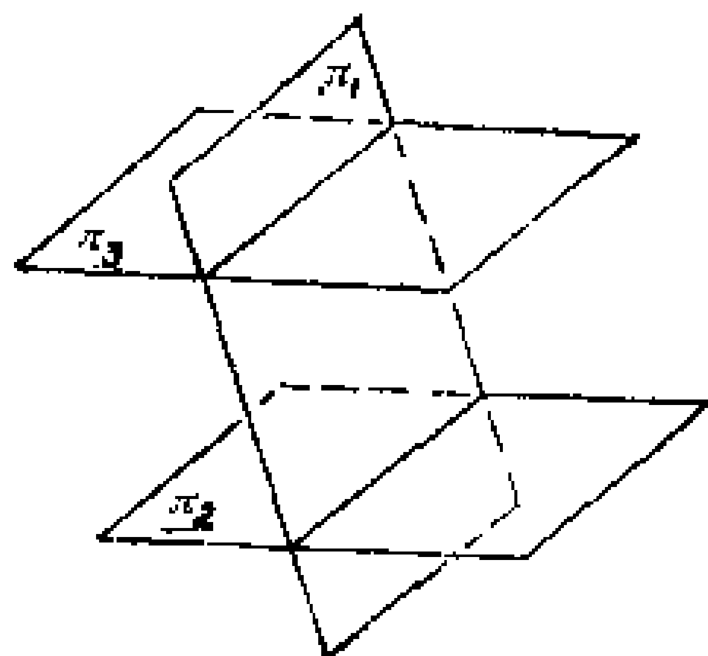


图 16

可知三个平面无公共点，但从行列式可知，后两行成比例

$$\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}\neq\frac{8}{5}$$

而第一行与第二行、第三行都

不成比例，所以可知 π_2 平行于 π_3，而 π_1 与 π_2、π_3 相交（图16）。

§7 面束与面把

这一节给出了面束和面把的定义，导出了面束和面把的方程，并且详细地证明了两个平面

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

构成的面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

一点说明：

利用面束和面把方程，在已给的条件下，求解平面方程是很有用的。希望读者要很好理解面束和面把的概念，并能用面束和面把方程解决一些问题。

例 在由平面 $2x+y-3z+2=0$ 和平面 $5x+5y-4z+3=0$ 所决定的平面束内，求两个相互垂直的平面，其中一个平面经过点(4，－3，1)。

解 因为已知的平面束方程为

$$2x+y-3z+2+\lambda(5x+5y-4z+3)=0$$

且其中一平面过已知点(4，－3，1)．所以点的坐标满足方程，代入得

$$(2\times4)-(-3)-3\times1+2+\lambda[5\times4+5\times(-3)-4\times1+3]=0$$

即 $$4\lambda+4=0$$

$$\lambda=-1$$

故过(4，－3，1)点的平面方程为

$$2x+y-3z+2-(5x+5y-4z+3)=0$$

整理得

$$3x+4y-z+1=0.$$

另一平面也在平面束内，故为

$$(2+5\lambda)x+(1+5\lambda)y-(3+4\lambda)z+(2+3\lambda)=0$$

所以

$$\vec{n}_2=\{2+5\lambda,\ 1+5\lambda,\ -(3+4\lambda)\}$$

而 $\vec{n}_1=\{3,4,-1\}$

根据题意 $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

因而 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=3(2+5\lambda)+4(1+5\lambda)+(3+4\lambda)=0$

即 $39\lambda+13=0$

所以 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$。

因此，另一平面方程为

$$2x+y-3z+2-\frac{1}{3}(5x+5y-4z+3)=0$$

整理得

$$x-2y-5z+3=0。$$

§8 直线的标准方程

本节给出了直线的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

其中 x_0,y_0,z_0 表示直线上的已知点坐标，其分母 l,m,n 表示直线的方向向量 $\vec{a}$ 的坐标。从方程的条件容易看出，已知直线上的一个定点与直线的方向，即可写出直线的标准方程。方程是通过直线的方向向量与向量 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$ 共线推导出来的，有时也把

$$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}=\vec{0}$$

作为直线的向量方程。

一点说明：

方向向量对直线来说，只表示方向，所以与方向向量的模长无关，因此，方向向量可取单位向量。这时单位向量的坐标就是方向向量的方向余弦。另外，方向向量的坐标可能出现零的情况。例如

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{0}$$

这时也可写成

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\quad z-z_0=0$$

这是因为，当方向向量 $\vec{a}=\{l,m,n\}$ 的坐标 $n=0$ 时，已知直线是平行于 Oxy 面的，因此，已知直线上任一点 $M(x,y,z)$ 的 z 坐标要等于已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的 z_0 坐标，所以有 $z-z_0=0$。因而，已知直线就可看作平面 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ 与 $z-z_0=0$ 的交线。

例 求经过点 $A(1,-5,3)$ 且与坐标轴各成 $60°, 45°, 120°$ 角的直线方程。

解 由题意可知，直线经过点 A，所以 A 点可看成直线上的已知点，又直线与各坐标轴所成的角为 $60°, 45°, 120°$，所以直线的方向余弦可写为

$$\cos 60°,\ \cos 45°,\ \cos 120°$$

即直线的方向向量 $\vec{a}=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right\}$，所以直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{-1}.$$

§9 直线的参数方程

本节给出了直线的参数方程

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\}$$

其中，x_0, y_0, z_0 表示直线上已知点的坐标，l, m, n 表示方向向量的坐标。

几点说明：

1　参数方程与其它直线方程所不同的是引入了参数 t。直线上动点坐标 x, y, z 都是参数 t 的函数。当 t 取不同的值，可确定不同的 x, y, z 的值，也就是得到直线上不同的点。当 t 连续变化时，相当于点在直线上连续运动。x, y, z 在这种方程中没有直接关系，而借助 t 有间接的关系，这是参数方程的特点。

2　参数方程不仅有明显的几何意义，而且有明显的物理意义。参数 t 可看成质点运动的时间，l, m, n 可看成质点运动的速度向量坐标，点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 可看成质点运动的初始位置，而点 $M(x, y, z)$ 可看成是运动的质点与参数 t 对应的位置。

§10　直线的两点式方程

在初等几何里已知，过二定点存在唯一的一条直线。显然在空间解析几何中，已知二定点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 也能够得到直线的方程。这就是直线的两点式方程：

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

几点说明：

1　事实上，两点式方程可看成直线的标准方程的特殊形式。因为点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是直线上的已知点，而 $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ 所确定的向量就是直线的方向向量。因而这种方程与标准方程比较，实质上是相同的。

2　利用两点式方程，容易得到 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 在同一条直线上的必要充分条件是

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

也就是三点的对应坐标之差成比例。当然利用这种性质也可以推证四点共线的问题。

§11　直线的一般方程

本节给出了作为两个平面交线的直线的一般方程

$$\left.\begin{aligned}\pi_1:\ & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

并且研究了一般方程化为标准方程，标准方程也可化为一般方程。

几点说明：

1　直线在坐标面上的射影

我们知道，方程(*)所确定的直线可用 π_1 与 π_2 构成的面束中任何两个较简单的方程来表示。如可用直线对坐标面的两个投射平面的方程来表示，这种投射平面的方程与相应的坐标面的交线就是已知直线在坐标面上的射影。

例　已知直线 $\begin{cases}6x+4y+z-26=0\\ 2x+4y-3z-2=0,\end{cases}$

求该直线在三个坐标面上射影的方程。

解　如果从上述两个方程中分别消去 x，y 和 z，就得到对三个坐标面的三个投射平面的方程：

$$4y-5z+10=0,$$

$$x+z-6=0,$$

$$5x+4y-20=0.$$

因此，已知直线在 Oxy，Oxz 和 Oyz 面上射影的方程分别为

$$\left.\begin{array}{r}5x+4y-20=0\\ z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}x+z-6=0\\ y=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}4y-5z+10=0\\ x=0\end{array}\right\}$$

2　在讲义第三章§11中已经讲过，已知直线的一般方程可以化成简单形式

$$\left.\begin{array}{l}x=az+p\\ y=bz+q\end{array}\right\}$$

其中 p,q 表示已知直线与 Oxy 坐标面交点的 x,y 坐标，即交点为 $(p,q,0)$。此交点也叫做直线在平面上的足。现在指出参数 a 和 b的几何意义。如果在 Oxz 坐标平面上考虑方程 $x=az+p$，则 a 是斜率，也就是 a 是直线在 Oxz 坐标面上的射影和 Oz 轴所成角的正切。同理，b 是已知直线在 Oyz 坐标面上的射影和 Oz 轴所成角的正切。

§12　两条直线间的角

本节给出了两条直线间角的定义。如果两条直线的方向向量为 $\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$、$\vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$，则两条直线夹角$\varphi$的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

两条直线的垂直和平行的条件分别为

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

和

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

一点说明：

关于两条直线间的角的定义问题，有的是这样定义的：已

如空间的两条直线，通过空间任意的一点分别作两条已知直线的平行线，它们所构成的两个角中的任何一个都叫做已知两条直线间的角。在本书中，我们是用两条直线方向向量的夹角定义两条直线间的角的。这是因为在解析几何中，常把直线看做有向直线，而在一般情况下，应当把直线的方向向量的方向作为直线的方向。因此，两个方向向量的夹角正好是两条已知直线正向间所构成的角。

§13　点到直线的距离

本节给出了点到直线的距离公式。如果已知点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，已知直线 p 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

则点 M_1 到直线 p 的距离 d 为

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1-z_0 & x_1-x_0\\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ l & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

其中 l, m, n 为直线 p 的方向向量 $\vec{a}$ 的坐标。

几点说明：

1　推导出这个公式的基本想法是，把连接定点 M_1 与定直线上已知点的线段看成一个向量，又与直线的方向向量构成一个平行四边形，而点到直线的距离 d，恰好是平行四边形的高。根据二向量外积的几何意义，此二向量外积的模恰好是平行四边形的面积，因而，再除以方向向量的模，即平行四边形的一个边长，就得到距离 d。熟练掌握这种基本方法，对于解决实际问题很有用。

2　点到直线的距离公式也可用射影的方法导出，从图17可以看出，点 M_1 到直线 p 的距离 d 为

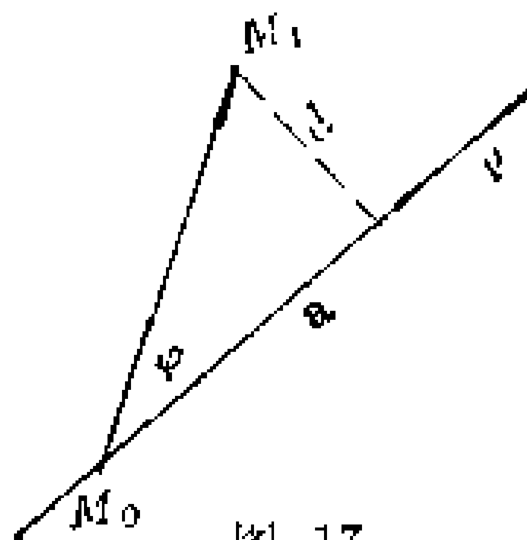


图 17

$$d = |\overrightarrow{M_0M_1}| \sin\varphi$$

而

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{M_0M_1}|\ |\vec{a}|}$$

所以

$$d = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{M_0M_1}|\ |\vec{a}|}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

如果用坐标表示出来，就与前边写出的表达式相同。

§14　两条直线的公垂线方程

这一节的主要内容是导出两条直线的公垂线方程，要掌握好公垂线的概念并熟知在初等几何中讨论过的两条异面直线的公垂线是存在的、唯一的，而且是最短的。

一点说明：

两条直线的公垂线是要求唯一的。在我们的讨论中，所谓两条直线是指两条异面直线或两条相交的直线；而且所谓公垂线又必须与已知二直线相交，这样就保证了唯一的要求，否则与两条直线垂直的直线是无穷多的。还应注意的是，在提到的两条直线中，没有包括两条平行的直线，这是因为与两条平行直线垂直且相交的直线有无穷多，它不具备唯一的条件。

§15　两条异面直线间的距离

这节主要给出了求两条异面直线间的距离公式。要很好掌

握推导公式的基本想法。

所谓异面直线间的距离是指端点分别在两条异面直线上的公垂线段的长度。

设已知两条异面直线 p 和 q，它们的方程为

$$p: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$q: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

从二直线的方程容易看出，方向向量分别为 $\vec{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$，$\vec{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$；两条直线上的已知点分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$。

求出二异面直线间的距离 d 的基本想法是：把向量 $\vec{a}_1$ 和 $\vec{a}_2$ 的始点移到 M_1 点，这时 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$ 和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 三向量为棱可构成一个平行六面体。显然，两条已知的异面直线间的距离等于平行六面体含有直线 p 和 q 的两个平面间的距离。因此，求出平行六面体的高就是距离 d。因而，

$$d=h=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}$$

其分子为平行六面体的体积，分母为平行六面体的底面积。若用坐标表示，则得

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}\text{的绝对值}$$

即得计算二异面直线间的距离公式。

几点说明：

1　两条异面直线间的距离公式也可用射影的方法推得。

请看图18，其中$\vec{a}_1\times\vec{a}_2$同时垂直于向量$\vec{a}_1$与$\vec{a}_2$，它表示公垂线的方向。它的单位向量是

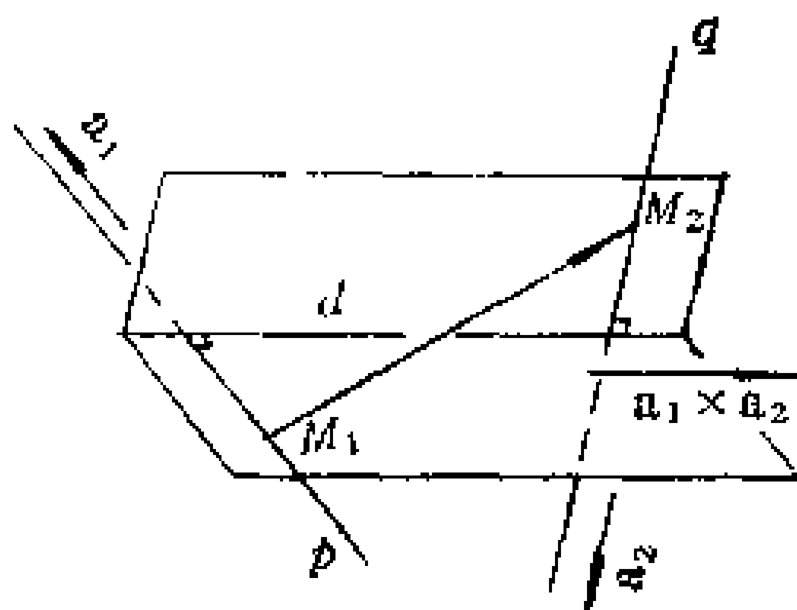


图 18

$$\vec{a}^{\circ}=\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}\qquad(1)$$

容易看出，$\overrightarrow{M_1M_2}$在$\vec{a}^{\circ}$方向上的垂直射影就是p,q垂线的长度d，所以

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}^{\circ}|\qquad(2)$$

把（1）代入（2），即得

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}$$

代入坐标，就得到距离d的坐标表达式。

2　两条异面直线间的距离为什么最短，从图18容易看出，在直线p,q上各取一点所联成的一切线段中，d为最短。这是因为

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}^{\circ}|=||\overrightarrow{M_1M_2}||\vec{a}^{\circ}|\cos\theta|$$
$$=|\overrightarrow{M_1M_2}||\cos\theta|\leqslant|\overrightarrow{M_1M_2}|.$$

其中θ是$\overrightarrow{M_1M_2}$与$\vec{a}^{\circ}$间的角。

§16　直线与平面间的角

§17　直线与平面的交点

§18　两条直线共面的条件

这三节是在前边讨论了平面和直线的基础上，来研究直线和平面的位置关系。它们给出了求直线与平面间角的公式，直

线与平面的平行和垂直的条件，以及两条直线共面的条件。这几节的内容虽然较容易，但它们在解决实际问题时的用处较大。

一点说明：

我们已知，如果两条直线的方程为

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+l_1t \\ y=y_1+m_1t \\ z=z_1+n_1t \end{array}\right\} \quad (1) \quad 和 \quad \left.\begin{array}{l} x=x_2+l_2t \\ y=y_2+m_2t \\ z=z_2+n_2t \end{array}\right\} \qquad (2)$$

那么它们共面的必要充分条件为

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (*)$$

这里需要注意的是，两条直线共面与向量共面的概念并不一致．两条直线共面，要求它们必须同时在一个平面上．另外，条件(*)虽然是两条直线共面的必要充分条件，但是对于两条直线相交来说，它只是必要条件，而不是充分条件．如果若判断两条直线是否相交，那么可先看条件(*)是否成立．如果条件(*)成立，然后再检查一下两条直线的方向向量是否共线，若不共线，则二已知直线必相交．

例　已知直线

$$p:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$$

和

$$q:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$$

以及它们的公垂线方程为

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1\ (含有\ p):\ x-2y+5z-8=0 \\ \pi_2\ (含有\ q):\ x+y-z-1=0 \end{array}\right\}$$

试求公垂线与 p,q 的交点和 p,q 的最短距离．

解　为了求出公垂线与 p,q 的交点，把 p 的方程写成参数形式

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

代入 π_2 的方程，得$t = -\frac{1}{3}$，再代回参数方程，则得平面π_2与直线 p 的交点 $M_1\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$，而且该点满足 π_1 的方程，所以 M_1 确是 p 和公垂线的交点。同理可求得 q 和公垂线的交点 $M_2\left(\frac{7}{6}, 2, \frac{13}{6}\right)$。

直线 p 和 q 的最短距离是

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 2\right)^2 + \left(1 - \frac{13}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{14}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{294}.$$

四 小 结

为了使读者更好地掌握本章的主要内容，我们把它概括如下：

一 平面

1 关于平面的基本定理 在空间直角坐标系中，平面的方程是一次的，一次方程表示平面。

2 平面方程的几种形式

（1）点法式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

（2）一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

（3）三点式

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

（4）截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

（5）法线式

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

3　平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 化为法线式方程的法化因子为

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中分母的符号由 D 的符号决定，当 $D<0$ 时，取正号，$D>0$ 时，取负号，$D=0$ 时，任意选取。

二　直线

直线方程的几种形式

（1）标准式

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

（2）参数式

$$\left.\begin{array}{l}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{array}\right\}$$

（3）　两点式

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

（4）　一般式

$$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}\right\}$$

三　距离

（1）点 $M'(x',y',z')$ 到平面

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

的距离为

$$d=|x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma-p|$$

（2）点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

的距离为

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{y_1-y_0}{m} & \frac{z_1-z_0}{n}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{z_1-z_0}{n} & \frac{x_1-x_0}{l}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{x_1-x_0}{l} & \frac{y_1-y_0}{m}\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

（3）两条异面直线

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

之间的距离为

$$d=\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}n_1 & l_1\\ n_2 & l_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2}}$$ 的绝对值。

四　交角

（1）两个平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

和

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的夹角 φ，由公式

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

确定，其中 $0\leqslant\varphi<\pi$。

（2）两条直线

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

之间的角 φ，由公式

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

确定，其中 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$。

（3）直线

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

与平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

之间的角 θ，由公式

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

确定，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

五　垂直、平行、重合的条件

1　两个平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

和

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

（1）垂直的必要充分条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

（2）平行的必要充分条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

（3）重合的必要充分条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

2　两条直线

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

（1）垂直的必要充分条件为

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

（2）平行的必要充分条件为

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

3　直线

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

与平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

（1）垂直的必要充分条件为

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

（2）平行的必要充分条件为

$$Al+Bm+Cn=0$$

（3）在上的必要充分条件为

$$\left.\begin{aligned}Al+Bm+Cn=0\\Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{aligned}\right\}$$

第四章　二次曲面学习指导

一　本章要点

本章主要介绍几种常见的二次曲面，如旋转曲面、椭圆面、双曲面、抛物面、锥面和柱面。讨论曲面和曲线方程的概念以及常见的二次曲面的方程和形状。这一方面是为了生产及生活实际的需要，另一方面也是为了进一步学习其他学科提供具体的几何形象。

二　基本要求

1　很好理解曲面和曲线方程的导出方法，弄清曲面与其方程之间的关系；

2　掌握旋转曲面的定义及其方程导出的思想方法，牢记旋转曲面的特点；

3　掌握椭圆面、双曲面、抛物面、锥面和柱面的标准方程，会用平行截口法讨论诸曲面的形状和性质。

三　内容分析

§1　曲面方程

本节从理论上严格地给出了曲面与方程的定义，并指出

了可能遇到的几种特殊情形；提出了本章的讨论对象以及讨论中所涉及的问题。

几点说明：

1 曲面方程的意义

曲面方程的意义和平面曲线方程的意义相类似，那就是把作为点的轨迹的曲面所适合的规律性用代数式表示出来。点变动的规律性在几何方面用点的轨迹来表示，在代数方面用代数方程来表示。因此，在直角坐标系下，作为动点轨迹的曲面与点的坐标所满足的方程之间建立了对应关系。

如果，从集合的观点来看，方程式 $F(x, y, z)=0$ 把空间里所有点分成两部分：一部分是坐标满足方程的点的集合，另一部分是坐标不满足方程的点的集合，前者即为 $F(x, y, z)=0$ 所确定的曲面。

2 方程 $F(x, y, z)=0$，可能代表的几种曲面

在解析几何中，通常用形如

$$F(x, y, z)=0$$

的方程来表示曲面方程。这里 F 是 x，y，z 的有理整函数，当 F 具有各种不同形式时，它代表各种不同的曲面。其中值得注意的有下面两种情形：

（1）曲面的点都是虚点，即空间不存在坐标满足方程的实点。这种曲面称之为虚曲面。如

$$x^2+y^2+z^2+1=0$$

（2）曲面上只有一个实点或曲面退化成一条曲线（包括直线），称之为退化曲面。如

$$x^2+y^2=0, \quad (x-a)^2+(y-b)^2=0$$

前者表示 $x=y=0$ 的直线，即 Oz 轴；后者表示过点 $(a, b, 0)$ 的平行于 Oz 轴的直线。

又如

$$(x^2+y^2+z^2-1)^2+x^2=0$$

表示 $Oyz(x=0)$ 平面与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相交的圆。

由上所述，方程所表示的曲面，一般有三种可能：实曲面、虚曲面和退化曲面。

3　曲面的参数方程

曲面方程除上述常见的形式 $z=f(x, y)$ 和 $F(x, y, z)=0$ 外，再介绍一种参数形式

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi_1(u, v) \\ y=\varphi_2(u, v) \\ z=\varphi_3(u, v) \end{array}\right\}$$

也就是把曲面的流动坐标 x，y，z 分别表示成两个辅助变量 u，v 的函数，称这组函数为曲面的参数方程。变数 u，v 叫做参数。

例如，以坐标原点为中心，半径为 r 的球面参数方程为

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, \quad y=r\sin\varphi\sin\theta, \quad z=r\cos\varphi$$

其中 θ, φ 为参数。

曲面方程的参数式在高等数学和微分几何中经常使用。

4　应用

根据方程与曲面的定义，我们可以直接验证某点 M_0 是否在已知曲面上。即只要把该点的坐标代入曲面方程，若坐标满足方程，则该点在曲面上，否则，就不在曲面上。

例　试判定点 $M_1(2, -3, 6)$，$M_2(3, 2, -4)$ 是否在球面 $x^2+y^2+z^2=49$ 上？

解　将点 M_1, M_2 的坐标分别代入方程，则有

$$2^2+(-3)^2+6^2=49$$

$$2^2+(-3)^2+4^2\neq 49$$

因为，M_1 点的坐标满足方程 $x^2+y^2+z^2=49$，所以 M_1 点在球面上；而 M_2 点的坐标不满足方程，所以 M_2 点不在球面上。

§2　曲线方程

本节首先定义了空间曲线，然后给出曲线方程的两种表示形式：一是一般式；二是参数式。同时给出了求三个曲面交点

的代数方法。

几点说明：

1 关于曲线方程的表示

空间曲线是作为两个曲面的交线来定义的，它的一般方程为

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x, y, z)=0\\ \phi(x, y, z)=0\end{array}\right\}$$

其中，$\varphi=0$，$\phi=0$分别为两个已知曲面方程。

为什么已知空间曲线可以用方程

$$p\varphi(x, y, z)+q\phi(x, y, z)=0$$

中的任意两个曲面方程表示呢？

为说明此问题，我们不妨先回忆一下平面解析几何中的直线束。

平面内过一已知点 M_0 的所有直线构成直线束。如果，已知点M_0用二直线的交点来表示，即

$$M_0:\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{array}\right\}$$

则过M_0的直线束方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

对于不同的 λ 和 μ 值，此方程确定过已知点 M_0 的不同直线。这时，已知点 M_0 当然可以用直线束中的任意两个直线方程来表示。

与此相仿，空间内过同一曲线的曲面有无限多个，这些曲面构成曲面束。如果，空间曲线方程为

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x, y, z)=0\\ \phi(x, y, z)=0\end{array}\right\}$$

则方程

$$p\varphi(x, y, z)+q\phi(x, y, z)=0$$

即为过该曲线的曲面束方程。所以，空间曲线可以用束中的任意二曲面方程来表示。

对于空间曲线还有另一种表示——参数式．如果把曲线看做质点运动的轨迹，那末参数表示法对于讨论与质点位置有关的一些问题，会带来很大方便．因此，它在物理学中经常使用。

曲面方程的上述两种形式是可以互相转化的。

例如，由一般方程解出x与y，我们就得出形式

$$x=f_1(z),\ y=f_2(z)$$

独立变数z又可看做是另一变数t的函数，如$z=\varphi_3(t)$，那么一般方程就化为参数式

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t)$$

反之，由参数方程消去t，就会得到关于(x, y, z)的两个方程，即得到一般方程。

方程的上述两种形式在应用中，根据不同情况，可任意选用。

§3 旋转曲面

本节首先讲述了旋转曲面的定义，从定义出发分析了旋转曲面的基本特征．在此基础上导出了旋转曲面的方程．从五个具体的旋转曲面方程中，归纳出旋转曲面方程的特点．本节为§4，§5，§6的讨论准备了条件。

几点说明：

1 对旋转曲面定义的解释

在空间，设已知直线为a，与它在一个平面上的平面曲线为L．当曲线L绕直线a旋转时，L上的每一点都描绘出一个圆周，此圆周所在的平面垂直于直线a，且圆心在此直线上（图19）．而且该圆的半径等于该点到直线a的距离。直线a

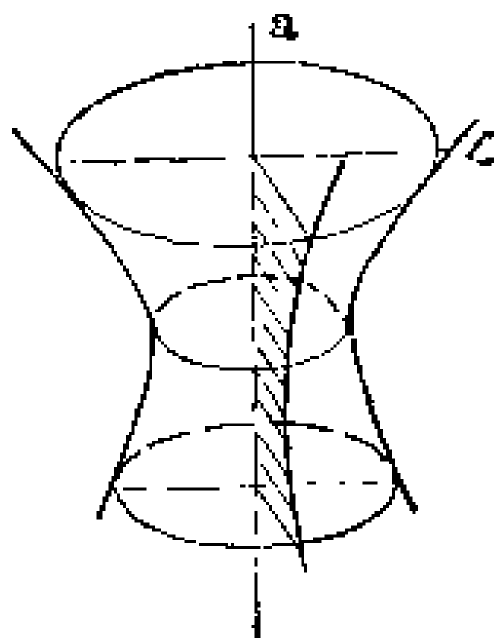


图 19

称为旋转轴，由母线L描出的曲面称为旋转曲面。

由此，得出旋转曲面有如下两个特征：

（1）凡旋转曲面，用垂直于旋转轴且与其曲面相交的平面去截，其截口曲线定为一个圆周，称之为平行圆周。

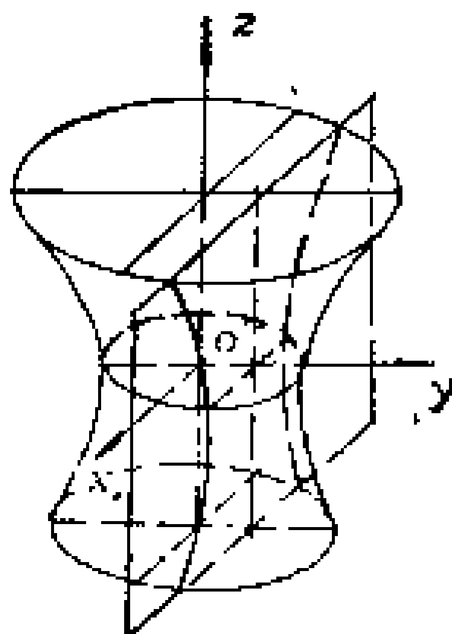


图 20

（2）用平行于旋转轴且与其曲面相交的平面去截，则截口曲线一般为与母线同类型的曲线(图20)。

特别是用过旋转轴的平面去截，其截口曲线就是母线，只是位置不同而已。

2　旋转曲面方程的特点

依据旋转曲面的上述特征，讲义中详细地推导了求旋转曲面方程的过程，这里不再赘述。但此过程却给出了如下规律：

为了求得曲线$F(y, z)=0$绕Oz轴的旋转曲面方程，只要用$\sqrt{x^2+y^2}$去代替此曲线方程中的y即可。

关于平面曲线绕另外的坐标轴的旋转，所生成的曲面也具有同样的规律。

例如，当母线$F(y, z)=0$绕Oy轴旋转时，由上述规律直接得到旋转曲面的方程为

$$F(y, \sqrt{x^2+z^2})=0$$

3　旋转曲面的次数

平面曲线$F(y, z)=0$，绕Oz和Oy轴旋转生成的旋转曲面方程分别为$F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$和$F(y, \sqrt{x^2+z^2})=0$。根据曲面与方程的关系，这两个方程代表两个不同的旋转曲面。为明显起见，这里不妨举一实例给以说明。

例　设母线方程为

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2pz \\ x&=0 \end{aligned}\right\}$$

使其分别绕Oz和Oy轴旋转，求其旋转曲面和方程。

解 由旋转曲面方程一般推导方法（见讲义）可直接得出：

绕Oz轴旋转（图21）的曲面方程为

$$x^2+y^2=2pz$$

绕Oy轴旋转（图22）的曲面方程为

$$y^2=2p\sqrt{x^2+z^2}$$

或

$$y^4=4p^2(x^2+z^2)$$

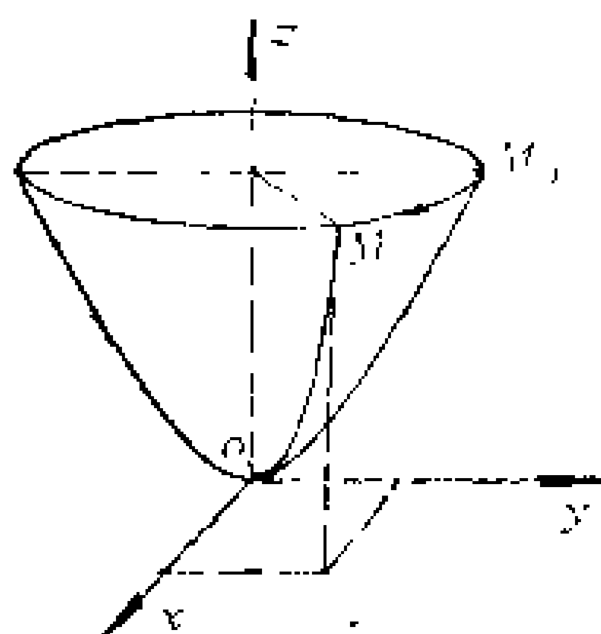


图 21

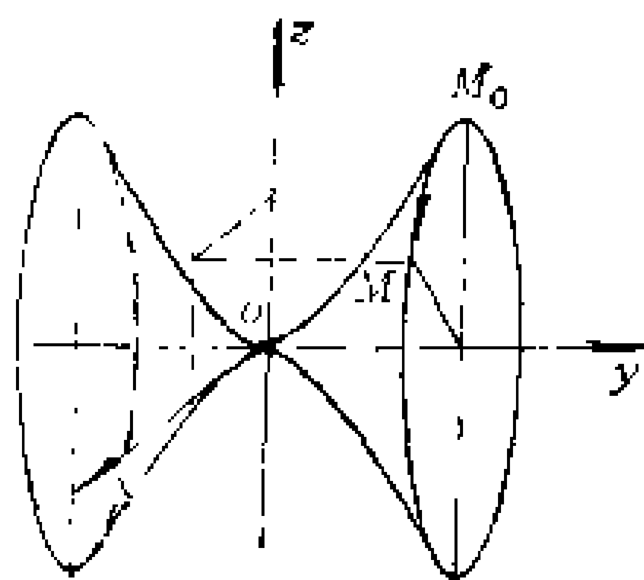


图 22

由此例看出，同一母线绕不同的轴旋转，生成的两个不同的旋转曲面的次数也不一定相同，所以旋转曲面不限于二次曲面，也可能是高次曲面或超越曲面（当母线为超越曲线时）．讲义上本节中的例2环面就是4次代数曲面．但二次曲线绕其对称轴旋转所得到的曲面，一般是二次的．

§4 椭圆面

§5 单叶双曲面

§6 双叶双曲面

这三节的内容是讨论三个一般的二次曲面．其处理方法是

在旋转曲面的基础上，通过伸缩变换，导出这三个曲面的方程；然后利用平行截口法进一步研究各曲面的形状及性质。学习时，首先要掌握这三个曲面的方程，而且会用平行截口法综合出方程所代表的曲面的近似图形。

几点说明：

1 已知曲面方程，怎样用平行截口法绘出方程所表示的曲面图形。

由曲面方程讨论曲面的形状，一般是用平行截口法。即对曲面的标准方程，分别用 $x=m$，$y=n$，$z=k$（m，n，k 取0，±1，±2，……）平面去截，观察

$$\left.\begin{matrix}F(x,y,z)=0\\x=m\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}F(x,y,z)=0\\y=n\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}F(x,y,z)=0\\z=k\end{matrix}\right\}$$

的形状和变化规律，然后综合绘制曲面图形的轮廓，即为相应方程所确定的曲面。

具体步骤如下：

第一步：画出坐标系；

第二步：画出三个坐标面上的截口曲线；

第三步：画出平行于坐标面（$x=m$，$y=n$，$z=k$）的平面上的截口曲线；

第四步：综合成曲面图形。

要完成上述工作，涉及到如何在空间直角坐标系中，绘制不同方向的截口曲线的画法问题。为此，我们将最常用的二次曲线近似图形画法介绍如下：

（1）在坐标面上：

i 椭圆：利用椭圆的基本矩形，画出椭圆的近似图形。如图表（Ⅰ）。

图表Ⅰ

坐标面	截口曲线方程	曲线图形
Oxy	$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{array}\right\}$	
Oyz	$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right\}$ $(b>c)$	
Oxz	$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{array}\right\}$ $(a>c)$	

ii 双曲线：利用基本矩形和渐近线，画出双曲线近似图形，如图表（Ⅱ）。

图表Ⅱ

坐标面	截口曲线方程	曲 线 图 形
Oxy	$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{array}\right\}$	
Oyz	$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right\}$	
Oxz	$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{array}\right\}$	

iii 抛物线：利用对称轴及开口方向，画出近似图形。如图表(Ⅲ)。

图表Ⅱ

坐标面	抛物线方程	曲线图形
Oxy	$\left.\begin{array}{l} y^2=2px \\ z=0 \end{array}\right\}$	
Oyz	$\left.\begin{array}{l} z^2=2py \\ x=0 \end{array}\right\}$	
Oxz	$\left.\begin{array}{l} x^2=2pz \\ y=0 \end{array}\right\}$	

（2）在 $x=m$，$y=n$，$z=k$ 平面上的图形可以类似地画出。

§7 椭圆抛物面
§8 双曲抛物面

椭圆抛物面和双曲抛物面，又统称为抛物面，它们也是两

种常见的曲面．本节是应用移动的观点导出了它们的方程．然后也是用平行截口法讨论其曲面的形状及性质．

一点说明：

关于二次曲面的定义和它的方程．

由§3知道，旋转曲面是用点的轨迹来定义的．§4—§6中各曲面是在§3的基础上，通过伸缩变换而得出的．§7—§8是利用动曲线在某种条件下移动时，形成的曲面．

本书的这种处理方法是比较自然的．其他多数教材中对于§4—§8中的诸曲面都是直接用方程来定义的．因此，有时使人感到突然．事实上，对于椭圆面、单叶双曲面、双叶双曲面也完全可以用动曲线在某种条件下移动来定义．就是先给出二次曲面的几何轨迹，然后导出它的方程．

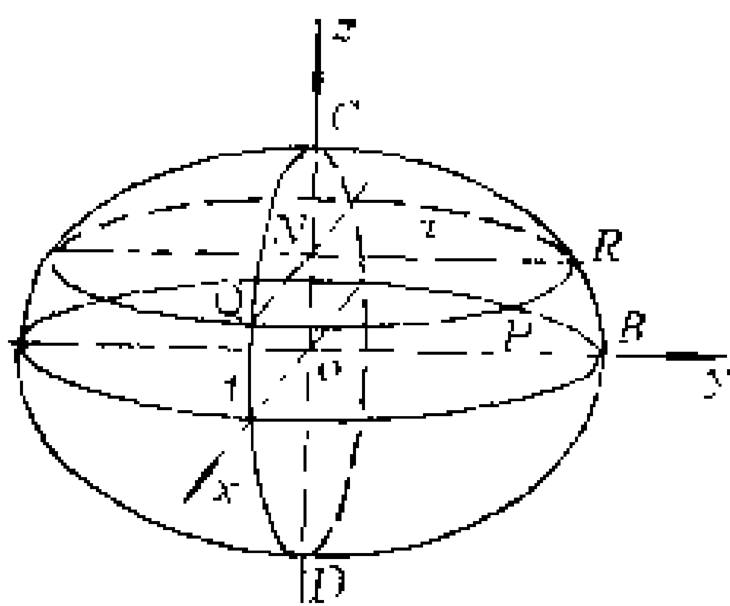


图 23

例如，椭圆面可以如下定义：

已知坐标系 $Oxyz$，在 Oxz 面上有一个椭圆 AQC（图23），在 Oyz 平面上有一个椭圆 BRC，椭圆BRC 和 AQC相交而且有共同的轴 CD．

取一动椭圆RPQ，它所在的平面π垂直于平面AQC和BRC．当 π 平行于Oxy平面变动，且动椭圆RPQ的长轴和短轴的两个端点分别在椭圆BRC和AQC上时，动椭圆 RPQ 形成的曲面就是椭圆面．

椭圆面方程也不难导出：设动椭圆的任意位置为 QRN（见图23），N为π与Oz轴交点（中心），Q，R分别在椭圆 AQC 和 BRC上移动．如果设$OA=a, OB=b$，$OC=c$，而且点$P(x,y,z)$为动椭圆上任一点，则动椭圆 QRN 的方程为

$$\frac{x^2}{\overline{NQ}^2}+\frac{y^2}{\overline{NR}^2}=1 \qquad (1)$$

因为点Q在椭圆AQC上，所以成立等式

$$\frac{NQ^2}{a^2}+\frac{ON^2}{c^2}=1 \quad 即 \quad NQ^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \qquad (2)$$

又因为R点在椭圆BRC上，所以成立等式

$$\frac{NR^2}{b^2}+\frac{ON^2}{c^2}=1 \quad 即 \quad NR^2=b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \qquad (3)$$

将（2），（3）代入（1）得椭圆面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

当 $a=b=c$ 时，即为球面。

类似地也可以定义其他曲面和推导出它的方程。

§9 柱　　面
§10 锥　　面

本节给出了一般的柱面和锥面的定义（非圆柱、圆锥）及其方程的推导方法。要求读者在给定的条件下会导出柱面和锥面方程。

一点说明：

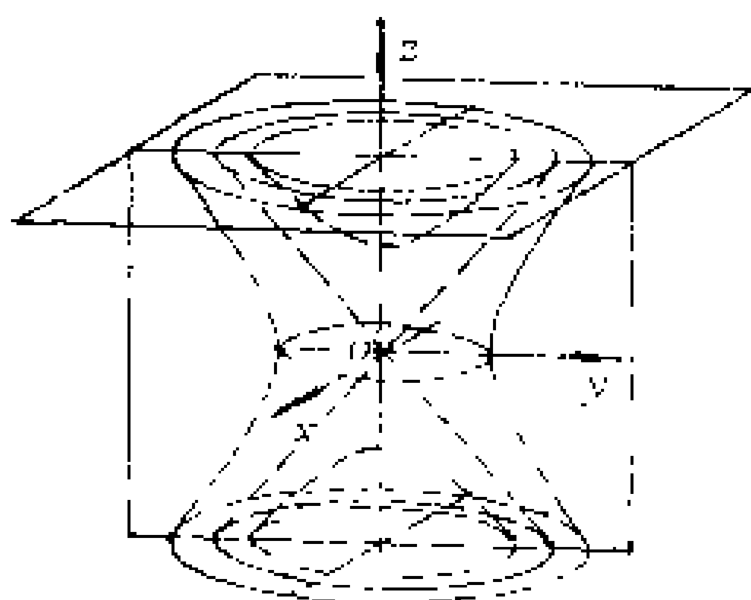
在讨论锥面时，有时遇到所谓渐近锥面的问题，现在对渐近锥面的性质加以讨论。

锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$（1）是单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$(2)

和双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$（3）的渐近锥面

我们用平行截口法来证明这个事实。

首先观察，用 $x=0$ 去截上述三曲面的截口曲线分别为



$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=0\\ x&=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(i)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1\\ x&=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(ii)}$$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1\\ x&=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(iii)}$$

图 24

从方程不难看出曲线（ii），（iii）是 $x=0$ 平面上的一组共轭双曲线。曲线（i）正好是此共轭双曲线的渐近线。同样，用 $y=0$ 去截仍得相同结果，即锥面的截口曲线是单叶双曲面和双叶双曲面在同一截平面上截口曲线的渐近线。

当用 $z=k$（图24）平面去截时，三个曲面的截口曲线分别为

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{k^2}{c^2}\\ z&=k\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1+\frac{k^2}{c_2}\\ z&=k\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{k^2}{c^2}-1\\ z&=k\end{aligned}\right\}\qquad\text{(c)}$$

（当 $|k|<C$ 时无轨迹，故取 $|k|\geqslant C$），显然截口皆是椭圆曲线。它们的长、短半轴分别记作 a'，b'；a''，b''；a'''，b'''；其值为

（a）曲线的长半轴为 $a'=\frac{a}{c}|k|$

短半轴为 $b' = \frac{b}{c}|k|$。

(b) 曲线的长半轴为 $a'' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2+k^2}$

短半轴为 $b'' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2+k^2}$。

(c) 曲线的长半轴为 $a''' = \frac{a}{c}\sqrt{k^2-c^2}$

短半轴为 $b''' = \frac{b}{c}\sqrt{k^2-c^2}$。

下面只须证明，当 $k \to \infty$ 时，a' 是 a''、a''' 的极限；b' 是 b''、b''' 的极限即可。即

$$\lim_{k\to\infty}(a''-a') = 0, \quad \lim_{k\to\infty}(b''-b') = 0$$

$$\lim_{k\to\infty}(a'''-a') = 0, \quad \lim_{k\to\infty}(b'''-b') = 0$$

证明：

$$\because \quad a''-a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2+k^2} - \frac{a}{c}|k|$$

$$= a\left(\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}} - \frac{|k|}{c}\right)$$

$$= a\left(\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}} - \frac{|k|}{c}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}+\frac{|k|}{c}}{\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}+\frac{|k|}{c}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}+\frac{|k|}{c}}$$

而当 $k\to\infty$ 时，$\frac{a}{\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}+\frac{|k|}{c}} \to 0$

$\therefore \quad \lim\limits_{k\to\infty}(a''-a')=0$

同理，可证得 $\lim\limits_{k\to\infty}(b''-b')=0$

因此，用 $z=k$ 去截，当 $k\to\infty$时，单叶双曲面的截口曲线的极限是锥面的截口曲线，故锥面是单叶双曲面的渐近锥面。

用类似的方法，不难证得该锥面也是上面双叶双曲面的渐近锥面。

§11 直纹面

本节给出了直纹面的定义、讨论了直纹面上直母线的性质，证明了二次曲面的直纹面只有四种：柱、锥、单叶双曲面和双曲抛物面。

一点说明：

在讲义中已经知道，锥面和柱面是直纹面，而单叶双曲面和双曲抛物面是否是由直线运动所构成的呢？从外形上看去并不明显，那么，我们只有用代数方法来证明它确实是由直线构成的（讲义已证）。在这一点上，要切忌直观上的错觉所带来的不正确结论。

那么，为什么椭圆面、双叶双曲面和椭圆抛物面不是直纹面呢？

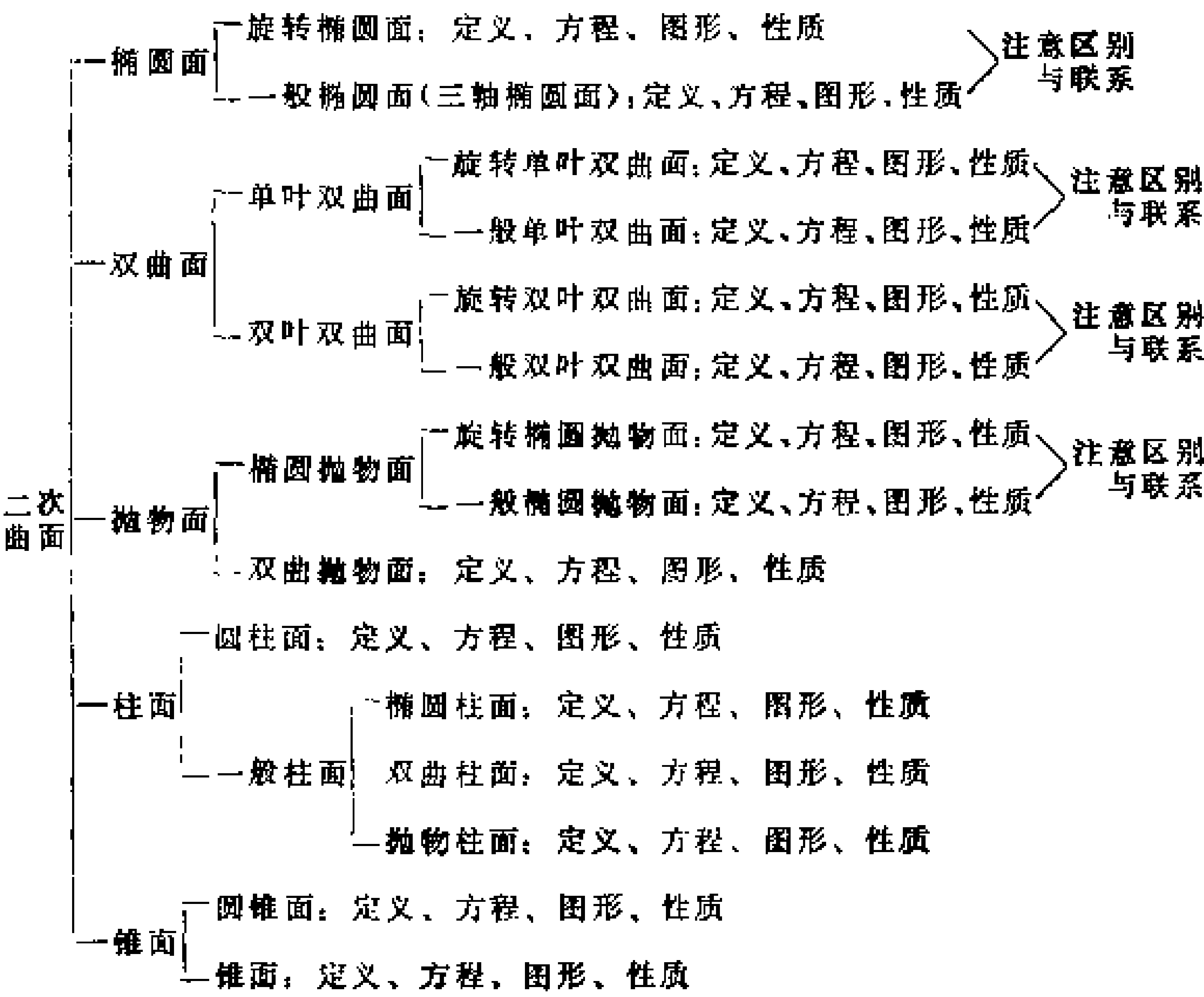
因为椭圆面是个有界曲面，它不可能含有整条的直线。而双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$，用平行于坐标面 Oxz 的平面去截，截口曲线为椭圆，所以在该曲面上不可能含有与平面 Oxz 平行的直线，一切与平面Oxy 相交的直线，也不可能整条的在这个曲面上，因为这个曲面上没有在平面Oxz 邻近的点。所以双叶双曲面不是直纹面。同理，椭圆抛物面也不是直纹面。

在直纹面中，有的沿直母线剪开之后可展成一个平面，这样的直纹面叫做可展曲面，如柱面、锥面。否则叫做不可展的

曲面，如双曲抛物面。

四 小 结

为了概括地系统地掌握本章的主要内容，我们把它整理如下：



第五章　二次曲面的一般理论学习指导

一　本章要点

在第四章中，我们介绍了几种常见的二次曲面．它们在直角坐标系中的方程都是关于x，y，z的二次方程，而且是标准形式．本章是在直角坐标系中，讨论一般二次方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

所代表的曲面．

虽然代数曲面在坐标变换下次数不变，即不依赖于坐标系的选择．但是，同一个曲面在不同的坐标系中，它的方程一般是不相同的．那么，如何适当地选取坐标系，使其曲面的方程具有标准形式呢？这就是本章要解决的主要问题．具体说来，要通过平移和旋转变换，化一般二次方程为标准形式．从而，判别方程（1）所代表的曲面的类型．

实际上，解决上述问题的处理方法，类似于在平面直角坐标系下二次曲线一般方程化为标准方程的过程，只不过在具体处理过程中，比平面的情况要复杂一些．

二　基本要求

1　熟悉坐标变换公式的由来及其实质；

2　掌握如何求曲面中心和主方向的方法；

3　熟练掌握有心二次曲面和无心二次曲面化简的步骤；

4　能准确判定曲面所属的类型。

三　内容分析

§1　坐标变换

本章给出了三个变换公式：平移、旋转、一般变换．其中以旋转变换公式为难点．特别要弄清旋转变换中新旧坐标轴之间所成的几个角以及它们的余弦间所具有的制约关系。

几点说明：

1　坐标变换的实质

平移变换和旋转变换，实际上是原坐标系本身的一种刚体运动的结果．即不论坐标系如何选择，曲面的几何形状及大小都不发生任何变化．在这一点上，要特别注意与第四章的伸缩变换区别开来．因为伸缩变换是不改变原点、不改变坐标轴的方向，但它改变了测度单位的大小，所以伸缩变换的结果是使曲面改变了形状（伸长或缩短）。

2　旋转变换中几个角以及它们的余弦之间的制约关系，完全由旋转变换定义本身所内蕴．

已知空间直角坐标系的旋转变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

其中，x，y，z表示原坐标系中任一点的坐标，x',y',z'表示新坐标系中同一点的坐标．$\cos\alpha_i$，$\cos\beta_i$，$\cos\gamma_i$（$i=1$，2，3）分别表示每个坐标轴的旋转方向；当原坐标系中的基本向量记为$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$，新坐标系基本向量为$\vec{e'}_1$，$\vec{e'}_2$，$\vec{e'}_3$时，则$\vec{e'}_1$，$\vec{e'}_2$，$\vec{e'}_3$在原坐标系中的分解表示式为

$$\left.\begin{aligned}\vec{e'_1}&=\cos\alpha_1\vec{e_1}+\cos\beta_1\vec{e_2}+\cos\gamma_1\vec{e_3}\\ \vec{e'_2}&=\cos\alpha_2\vec{e_1}+\cos\beta_2\vec{e_2}+\cos\gamma_2\vec{e_3}\\ \vec{e'_3}&=\cos\alpha_3\vec{e_1}+\cos\beta_3\vec{e_2}+\cos\gamma_3\vec{e_3}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

由旋转变换定义知，测度单位大小不变，即$\vec{e'_1}$，$\vec{e'_2}$，$\vec{e'_3}$仍是单位向量，即$|\vec{e'_1}|=|\vec{e'_2}|=|\vec{e'_3}|=1$，故有

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1\\ \cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1\\ \cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

又旋转后三个轴向仍保持两两垂直，即

$$\vec{e'_1}\vec{e'_2}=\vec{e'_1}\vec{e'_3}=\vec{e'_2}\vec{e'_3}=0$$

故不难得出

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0\\ \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3=0\\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

又因为坐标轴旋转时，把右旋坐标系仍变为右旋坐标系，所以旧轴基本向量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$的混合积必与新轴基本向量$\vec{e'_1}$，$\vec{e'_2}$，$\vec{e'_3}$的混合积同值，即

$$(\vec{e_1}\,\vec{e_2}\,\vec{e_3})=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

与 $$(\vec{e'_1}\,\vec{e'_2}\,\vec{e'_3})=1$$

也就是

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1&\cos\beta_1&\cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2&\cos\beta_2&\cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3&\cos\beta_3&\cos\gamma_3\end{vmatrix}=1$$

3　对于一般变换，只要我们把它看做平移变换和旋转变换的合成即可，实际做题中很少直接利用一般变换公式，一般都是通过两步进行：先平移后旋转，或先旋转后平移。故此不

再赘述。

§2 用平移变换化简方程
§3 用旋转变换化简方程

这两节主要讲述如何求出平移和旋转变换公式，并通过它们将方程（1）分别消去流动坐标的一次项和坐标乘积项。其中旋转变换较难。要求读者确实掌握它们的方法。

几点说明：

1 平移、旋转变换化简方程的实质

坐标变换建立了在不同坐标系中同一点的坐标之间的对应关系，那么在坐标变换下，由点运动所生成的同一曲面方程又有什么变化呢？我们不妨以单叶双曲面为例，试观察之。

设单叶双曲面标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6)$$

(a) 当坐标原点移至点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$时，原方程变为

$$\frac{(x+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y+y_0)^2}{b^2}-\frac{(z+z_0)^2}{c^2}=1 \qquad (7)$$

(b) 当原坐标系经过旋转变换后，原方程变为

$$\frac{(x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3)^2}{a^2}$$

$$+\frac{(x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3)^2}{b^2}$$

$$-\frac{(x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3)^2}{c^2}=1 \qquad (8)$$

比较（6）和（7），（6）和（8），不难看出，由坐标原点位置的变化，使原标准方程增加了关于三个变量 x, y, z 的一次项；由坐标轴的旋转，原方程增加了关于三个变量的乘积项。由此自然想到：如果给出一般二次方程（1），能否通

过平移变换消去一次项，通过旋转变换消去乘积项呢？回答是肯定的。关键问题在于如何找出恰当的新坐标原点；如何适当选择坐标轴旋转的方向。这就是在讲义中所讲的求二次曲面中心和求二次曲面的主方向问题。所以平移变换化简方程的实质就是将坐标原点移到曲面的中心，使一般二次方程消去一次项；旋转变换化简方程的实质，就是将原坐标轴的方向旋转到平行于曲面的主方向，使一般二次方程消去坐标乘积项。

2　二次曲面中心的确定

现在我们来回答第一个问题，即如何找出恰当的新坐标原点。

设已给一般二次曲面方程（1），以它的对称中心为新坐标原点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则有平移变换公式为

$$x = x' + x_0,\quad y = y' + y_0,\quad z = z' + z_0$$

将上式代入（1），整理后，得出其系数变化规律为：

(a) 二次项系数不变

(b) 一次项系数变为：

$$\left.\begin{aligned} a_{14}' &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} \\ a_{24}' &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} \\ a_{34}' &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} \end{aligned}\right\}$$

(c) 常数项变为

$$a_{44}' = a_{14}x_0 + a_{24}y_0 + a_{34}z_0 + a_{44}.$$

因为平移变换的最终目的是为了消去一次项，那么，只要找到使一次项系数 a'_{14}，a'_{24}，a'_{34} 等于零的 x_0，y_0，z_0 所决定的 M_0 点作为新坐标原点即可。实际上这样找到的 M_0 点刚好是（1）所代表的曲面中心。因此

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

叫做中心方程组。

所以，恰当的新坐标原点就是中心方程组（9）的解所决

定的点。由这点的坐标所决定的平移变换，就能把（1）化为不含一次项的方程，形如

$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+a_{33}'z'^2+2a_{12}'x'y'+2a_{13}'x'z'+2a_{23}'y'z'+a'_{44}=0$$

3　二次曲面主方向的确定

下面，我们讨论化简二次方程的第二个问题：如何选择坐标轴的旋转方向，也就是如何确定曲面的主方向。

第三节定理1，2，3告诉我们：对于一般二次方程，必存在两两相互垂直的三个主方向$\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}$。实际上是说明了主方向的存在性。特别是定理3，又细分为三种情况：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$；$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$；$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\lambda_1\neq\lambda_3$，$\lambda_2\neq\lambda_3$ 来讨论，分别给出了求$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'},\vec{e_3'}$的具体方法。即三个充要条件：

(a) 使讲义中方程组（7'）的系数同时等于零的必要充分条件是特征根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$。

(b) 使讲义中方程组（7'）中有一个独立方程的必要充分条件是特征根 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$。

(c) 使讲义中方程组（7'）中有两个独立方程的必要充分条件是$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\lambda_1\neq\lambda_3$，$\lambda_2\neq\lambda_3$。

这样，就大大地缩减了由方程组(7')确定主方向$\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}$的计算过程。

例如情况（c），只要由一般二次方程（1）的特征方程求得特征根 λ_1，λ_2，λ_3 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，$\lambda_1\neq\lambda_3$，$\lambda_2\neq\lambda_3$ 时，就可以在方程组（7'）中任取两个独立的方程，解由它们组成的两个三元齐次线性方程组，得出所求主方向向量坐标的比，即

$$l_i:m_i:n_i=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\lambda_i & a_{23} \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}-\lambda_i \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix} \quad (10)$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_i \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}-\lambda_i \\ a_{33}-\lambda_i & a_{31} \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (11)$$

或 $\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_i & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_i \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33}-\lambda_i & a_{31} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_i \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ (12)

$(i=1,2,3)$

这样求得的向量组$\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$，若不同于原坐标中向量组$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$的定向，只要改变$\vec{e'}_i(i=1, 2, 3)$中某一个的符号就可以了。

显然，对于情况（a），（b）就更容易解决了。

上述求主方向的方法，具有如下几何解释：

若取（7′）中的前两个方程

$$(a_{11}-\lambda_i)l_i+a_{12}m_i+a_{13}n_i=0$$

$$a_{21}l_i+(a_{22}-\lambda_i)m_i+a_{23}n_i=0$$

设 $\vec{e_i'}=\{l_i, m_i, n_i\}$，$\vec{A}_1=\{a_{11}-\lambda_i, a_{12}, a_{13}\}$。

$\vec{A}_2=\{a_{21}, a_{22}-\lambda_i, a_{23}\}$

则第一式表示向量$\vec{e_i'}\perp\vec{A}_1$，第二式表示$\vec{e_i'}\perp\vec{A}_2$。所以，所求的主方向向量 e_i' 即垂直于$\vec{A}_1$，又垂直于$\vec{A}_2$，故 e_i' 的方向应由$\vec{A}_1\times\vec{A}_2$决定

而 $\vec{A}_1\times\vec{A}_2=\left\{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\lambda_i & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}-\lambda_i \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix}\right\}$

所以

$$l_i:m_i:n_i=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\lambda_i & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}-\lambda_i \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix}$$

即（10）式。

同理，可得（11）、（12）式。

下面，我们举例加以说明

例 求二次曲面 $3x^2+2y^2+z^2-4xy-4yz+5=0$ 的主方向。

解

第一步：求特征根

由特征方程

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda_1 = 5$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = -1$

第二步：求出主方向向量$\overrightarrow{e'_i}(i=1, 2, 3)$

当$\lambda_1 = 5$时，代入方程组（7′），得

$$-2l_1 - 2m_1 + 0n_1 = 0 \quad ①$$

$$-2l_1 - 3m_1 - 2n_1 = 0 \quad ②$$

$$0l_1 - 2m_1 - 4n_1 = 0 \quad ③$$

取其中两个独立的方程①，②，其系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

所以
$$\frac{l_1}{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{m_1}{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{n_1}{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}$$

即 $l_1 : m_1 : n_1 = 4 : -4 : 2$

因为$\overrightarrow{e_1'}$为单位向量，所以

$$\overrightarrow{e_1'} = \left\{\frac{2}{3}, \ -\frac{2}{3}, \ -\frac{1}{3}\right\}$$

同样方法可求得

当$\lambda_2 = 2$时，得 $\overrightarrow{e_2'} = \left\{\frac{2}{3}, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{2}{3}\right\}$

当$\lambda_3 = -1$时，得$\overrightarrow{e_3'} = \left\{\frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{2}{3}\right\}$

第三步：验证向量组$\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$，$\overrightarrow{e_3'}$是否是右旋的。

因为

$$(\overrightarrow{e_1'} \ \overrightarrow{e_2'} \ \overrightarrow{e_3'}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 1$$

所以，向量组$\vec{e_1}'$，$\vec{e_2}'$，$\vec{e_3}'$ 为已知二次曲面的主方向， 且为右旋的。

§4　有心二次曲面的标准方程

本节主要介绍如何将（1）中的有心二次曲面方程化为标准方程，由此来确定曲面形状。读者要着重掌握化简方法和步骤。

一点说明：

化简步骤如下

第一步：判别曲面是有心曲面，即 $I_3\neq 0$。

第二步：求曲面中心。

即解中心方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0\\a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0\\a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0\end{aligned}\right\}$$

求得 x_0，y_0，z_0。

第三步：计算平移变换后的常数项

即应用公式

$$a_{44}'=a_{14}x_0+a_{24}y_0+a_{34}z_0+a_{44}$$

来计算．至此，方程（1）变为

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z'+2a_{23}y'z'+a_{44}'=0$$

第四步：求出特征根 λ_i $(i=1，2，3)$ 和特征向量 $\vec{e_i}'$ $(i=1，2，3)$，由此写出旋转变换式．

第五步：整理后得到化简的方程

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+\lambda_3z''^2+a_{44}''=0$$

其中 $a_{44}''=a_{44}'$（因为旋转变换下常数项不变）。

一般说来，有心二次曲面的方程化为标准形式，最好是先平移后旋转，这样可以减少计算量。

这里值得注意的一点，就是对于所求得的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，是哪一个流动坐标平方项 x^2，y^2，z^2 的系数，一般是无法确定的，但这无碍于曲面的类型的识别，只不过是曲面对称轴的标号不同罢了。

§5 无心二次曲面的标准方程

本节主要介绍无心二次曲面方程化为标准形式的过程．要很好掌握化为标准方程的步骤．

一点说明：

化简步骤如下：

第一步：判别一般方程所确定的曲面是无心曲面．即$I_3=0$。

第二步：求特征根．

第三步：对于每个特征根求其相应的特征向量$\vec{e_i}'$（$i=1$，2，3），写出旋转变换式．

第四步：由公式

$$a_{p4}'=a_{14}l_p+a_{24}m_p+a_{34}n_p \quad (p=1,\ 2,\ 3)$$

求得系数 a_{14}'，a_{24}'，a_{34}'．

至此得到不含坐标乘积项的一般二次方程，形如：

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}'z'+a_{44}'=0$$

第五步：用配方法得平移变换式，将原方程化简为标准形式．

这里值得注意的是：由于三个特征根 λ_1，λ_2，λ_3 的不同情况，化简后的方程可表示11种不同的无心曲面．

四 小 结

1 坐标变换

（1）平移变换式

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \\ z &= z' + c \end{aligned}\right\}$$

（2） 旋转变换式

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}$$

（3） 一般变换式

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + a \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + b \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + c \end{aligned}\right\}$$

（4） 基本向量$\vec{e_1}'$，$\vec{e_2}'$，$\vec{e_3}'$满足如下关系

$$(\vec{e_i}')^2 = 1，\quad \vec{e_i}' \cdot \vec{e_j}' = 0，\quad (\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}') = 1 \quad (i = 1，2，3)$$

它们的坐标表达式为

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1 \qquad (i = 1，2，3)$$

$$\cos\alpha_i\cos\alpha_j + \cos\beta_i\cos\beta_j + \cos\gamma_i\cos\gamma_j = 0$$

$$(i \neq j，\ i，j = 1，2，3)$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

2　中心方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

它的解是二次曲面的中心，在平移变换时，它可作为新坐标系的原点。

3　二次曲面的分类

参看讲义第五章§6，不再重述。

第三部分　空间解析几何习题解答

第一章　空间坐标系习题解答

1．

解　描法如图1．

具体作图步骤见讲义和学习指导有关部分．

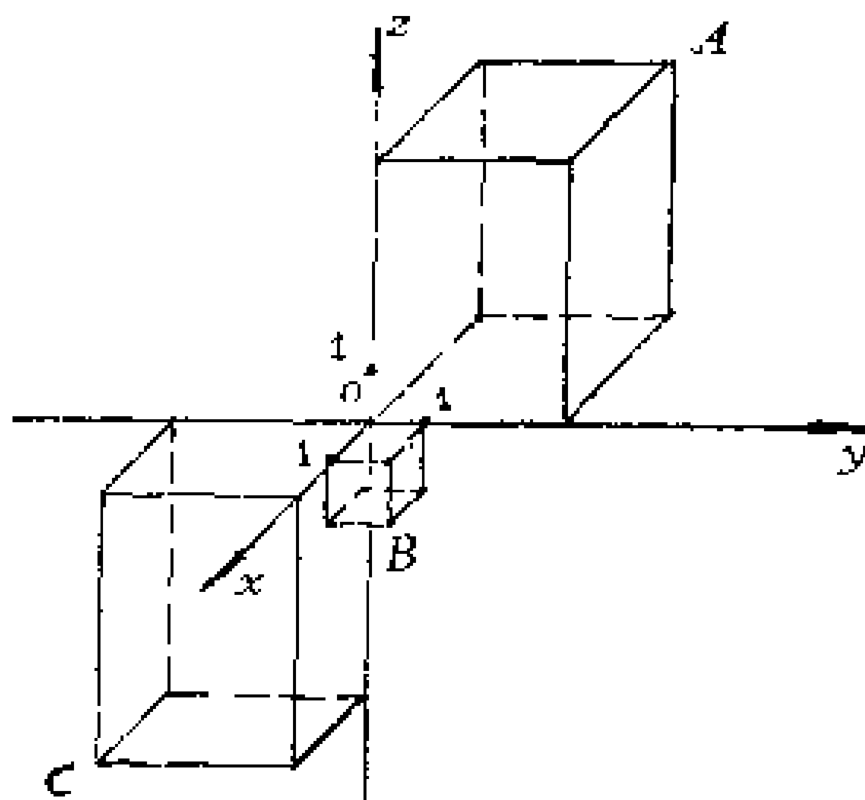


图 1

2．

解　点P关于Oxy坐标面的对称点坐标为（3，2，－1），关于Oyz坐标面的对称点坐标为（－3，2，1），关于Oxz坐标面的对称点坐标为（3，－2，1），关于Ox轴的对称点坐标为（3，－2，－1），关于Oy轴的对称点坐标为（－3，2，－1），关于Oz轴的对称点坐标为（－3，－2，1），关于坐标原点的对称点坐标为（－3，－2，－1）．

3．

解　当$a>0$时，点的位置在一、四、五、八卦限中．当$b>0$时，在一、二、五、六卦限中．当$c>0$时，在一、二、三、四卦限中．从而当$a>0$、$b>0$、$c>0$时，点A的位置在它们共同的卦限中，即在第一卦限中．

同理，当$a>0$，$b<0$，$c>0$时，点A在第四卦限中．当$a<0$，$b<0$，$c>0$时，点A在第三卦限中．当$a<0$，$b<0$，$c<0$时，点A在第七卦限中．当$a=0$，$b<0$，$c>0$时，点A

在第三、四卦限间的坐标平面上，即Oyz坐标面上。

4．

解　由坐标的定义知，点P在三个轴上的垂足坐标分别为$(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，和$(0, 0, z)$．点P在三个坐标面上的垂足坐标分别为$(x, y, 0)$，$(0, y, z)$和$(x, 0, z)$（图2）．

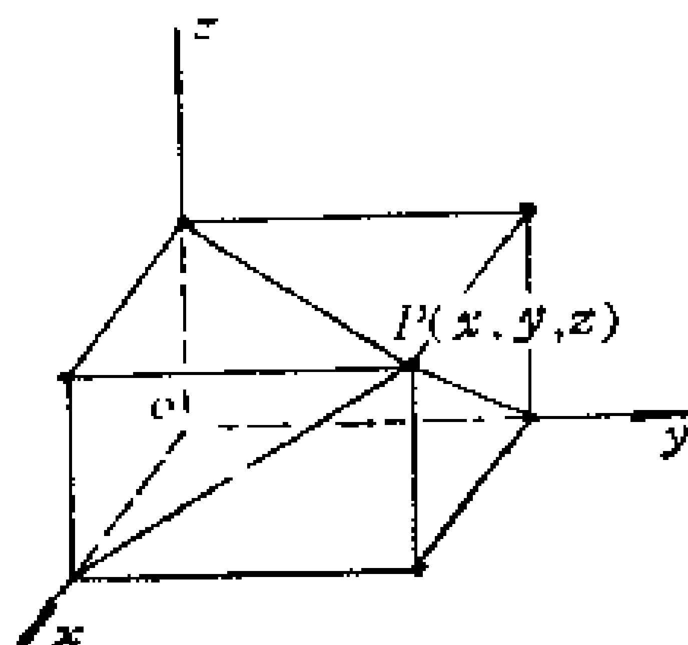


图 2

5．

解　因为点A关于Oy轴、Oz轴的坐标是零，所以点A在Ox轴上．同理点B在Oy轴上．面点C关于Oy轴的坐标是零，则点C在Oxz坐标面上．同理点D在Oxy坐标面上．

6．

解　（1）当$z=0$时，坐标满足$x=y$的点为Oxy坐标面上平分一、三象限的直线．当z任意取值时，直线平行移动形成一个平面，此平面平分空间的一、三、五、七卦限．所以满足$x=y$的点均在一、三、五、七卦限的平分面上（图3）．

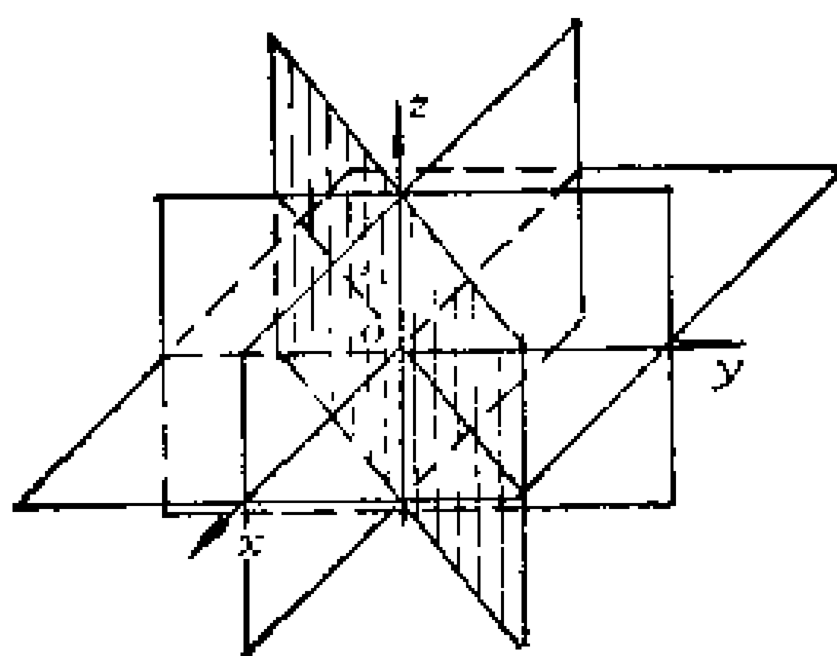


图 3

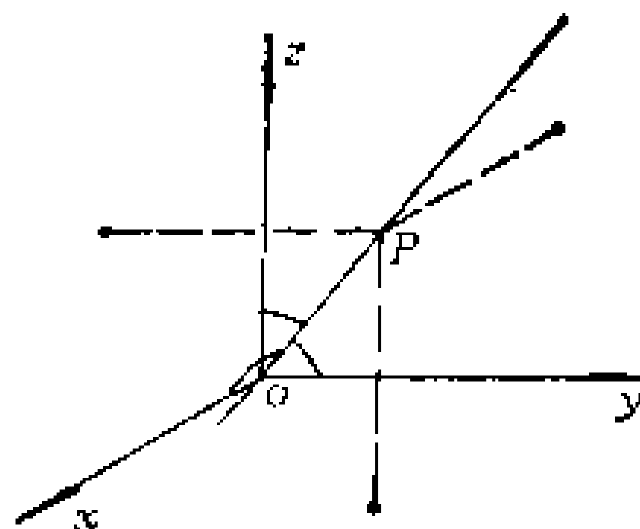


图 4

（2）由坐标的定义，满足$x=y=z$的点P到三个坐标面

的距离相等，因而到三个坐标轴的距离也相等。因此满足此条件的任一点与坐标原点的连线和三个坐标轴构成相等的角（图4）。所以满足条件 $x=y=z$ 的点均在通过坐标原点且与三个坐标轴构成等角的直线上。

7．

解 （1）因为满足坐标x与y都大于零的点，在一、五卦限，对x与y都小于零的点，在三、七卦限。所以满足 $xy>0$ 的点在一、三、五、七卦限。

（2）因为坐标满足 $y>0$ 而 $z<0$的点，在五、六卦限，满足 $y<0$而$z>0$的点，在三、四卦限，所以坐标满足$yz<0$的点在三、四、五、六卦限。

（3）因为坐标满足$x<0$而 $yz>0$的点，在二、七卦限。满足 $y<0$而 $xz>0$的点，在四、七卦限。满足$z<0$而$xy>0$的点，在五、七卦限。所以坐标满足$xyz<0$的点在二、四、五、七卦限。

8．

解 由正四棱锥的性质知（图5），Ox轴平分线段$\overline{P_1P_4}$和$\overline{P_2P_3}$，Oy轴平分线段$\overline{P_1P_2}$和$\overline{P_3P_4}$，而底面边长为 $2a$，则底面各点的坐标为：$P_1(a,\ a,\ 0)$，$P_2(-a,\ a,\ 0)$，$P_3(-a,\ -a,\ 0)$，$P_4(a,\ -a,\ 0)$。

下面求顶点 S 的坐标。

$$\because\quad \overline{OS}^2=\overline{P_1S}^2-\overline{OP_1}^2$$
$$=(2a)^2-(a^2+a^2)$$
$$=2a^2$$
$$\therefore\quad \overline{OS}=\sqrt{2}a$$

于是，顶点的坐标为

$S(0,\ 0,\ \sqrt{2}a)$。

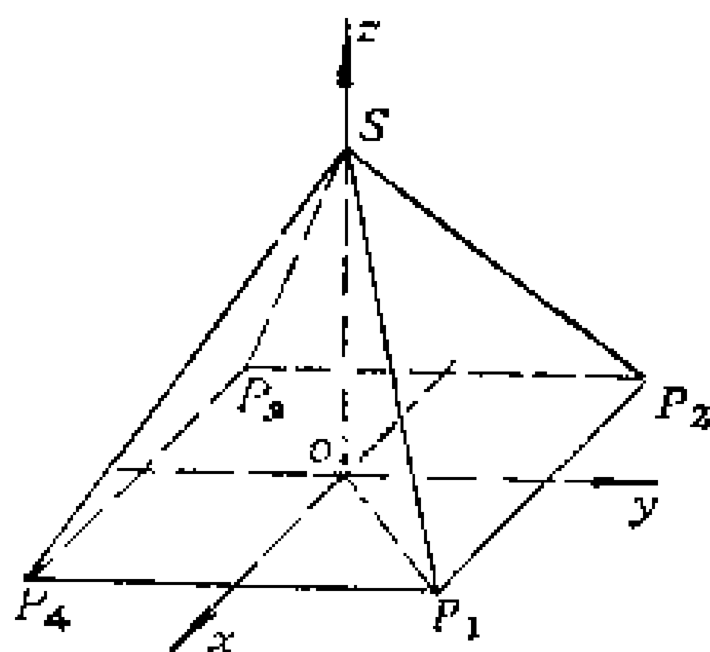


图 5

9．

解 依题意知，下底面的四个顶点分别在Ox轴和 Oy 轴上（图6），且坐标的绝对值等于底面对角线的一半，因而有

$$\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=\overline{OP_3}=\overline{OP_4}$$

∵ $\overline{OP_1}^2+\overline{OP_2}^2=m^2$

∴ $\overline{OP_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}m$

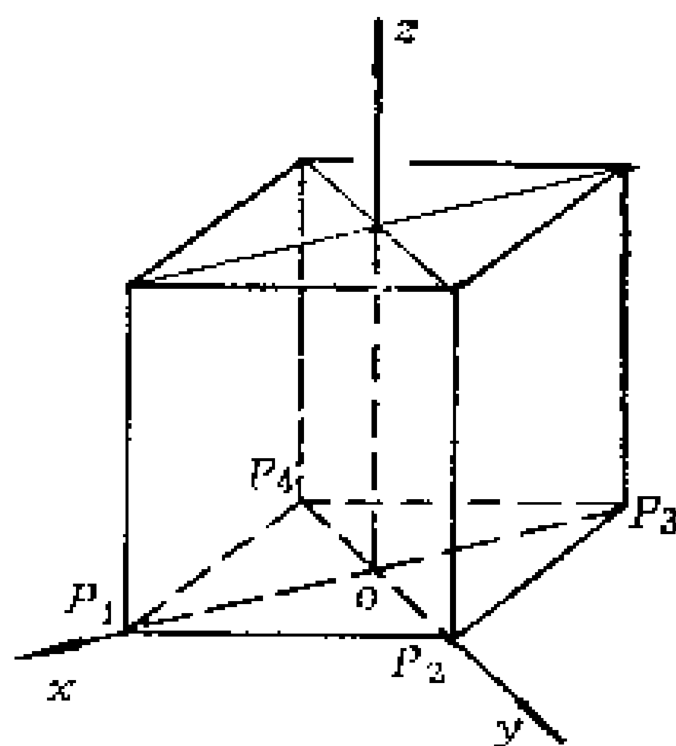


图 6

于是，下底面四个顶点坐标为：$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m,\ 0,\ 0\right)$，$P_2\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}m,0\right)$，$P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}m,0,0\right)$，$P_4\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}m,\ 0\right)$。上底面四个顶点坐标为：

$P_1'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m,\ 0,\ m\right)$，$P_2'\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}m,m\right)$，$P_3'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}m,0,m\right)$，$P_4'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}m,m\right)$。

10.

解 对于$z=5$，当$x=0$而y任意取值时，形成一条过点（0，0，5）且平行于Oy轴的直线，当x任意取值时，直线平行移动，从而构成一个过点（0、0、5）且垂直于Oz轴的平面（图7）。

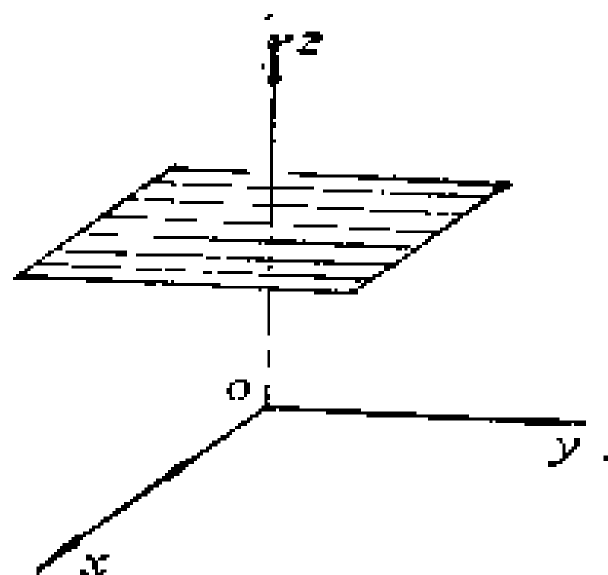


图 7

11.

解 对于$x=1$，$y=2$，当$z=0$时，是Oxy坐标面上的点$M(1,2,0)$，当z任意取值时，点M平行于Oz轴移动，因而形成一条直线。此直线就是满足题设条件的点的轨迹（图8）。

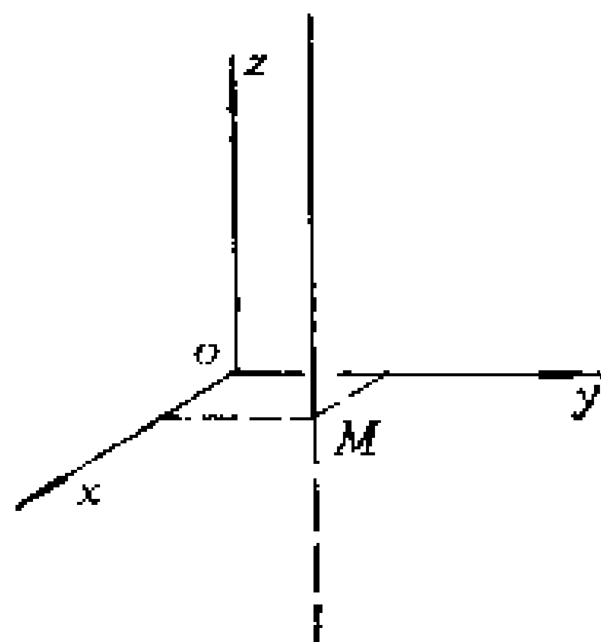


图 8

12.

解 因为球面与三个坐标面相切，所以球心到三个坐标面的距离都等于半径，即

$$|x| = |y| = |z| = 3$$

所以，（1）当球心在第五卦限时，球心坐标为（3，3，－3）。

（2）当球心在第二卦限时，球心坐标为（－3，3，3）。

（3）当球心在第七卦限时，球心坐标为（－3，－3，－3）。

13.

解 以极点 O 为中心作半径为 4 的球面，然后过 Oz 射线作与Oxz平面构成$\frac{\pi}{4}$角的半平面。最后再以 O 为顶点，以 Oz 射线为轴，作天顶角为$\frac{\pi}{6}$的锥面．这三个面的唯一交点就是点M_1的位置．同理，点M_2的作法也类似．但需要注意，点M_2的天顶角为π，则锥面退化成一条直线，即 Oz 射线的反向延长线．这时方位角在作图中就不起作用了（图 9）．

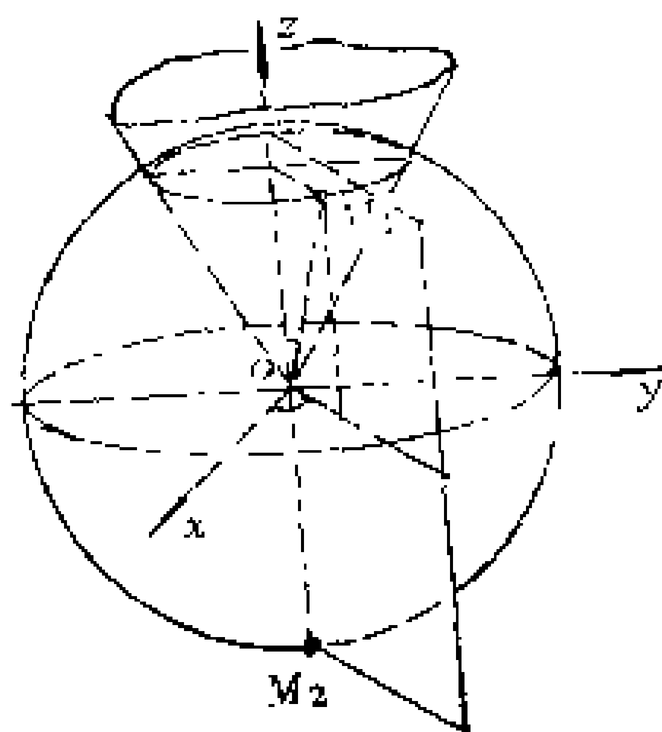


图 9

14.

解 将点M_1，M_2的极坐标代入讲义 §1 公式（1）中，得

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3} \\ y_1 &= 4\sin\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3} \\ z_1 &= 4\cos\frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x_2&=4\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\\y_2&=4\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\\z_2&=4\cos\frac{\pi}{3}\end{aligned}\right\}$$

由以上各式求得点 M_1, M_2 的直角坐标分别为$M_1(-\sqrt{3}, 3, 2)$，$M_2(3, \sqrt{3}, 2)$。

15.

解 由讲义§1公式（2）得

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$$

$\because$ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=\mathrm{tg}\theta$

$\therefore$ $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

但因点M在第四卦限

$\therefore$ $\theta=-\dfrac{1}{6}\pi$

又$\because$ $\cos\varphi=\dfrac{z}{r}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

所以点M的极坐标为$\left(4, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$。

16.

解 （1）由讲义§1公式（2）得

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

即

$$r^2=25$$

$\therefore$ $r=\pm 5$

但因 $r>0$

$\therefore$ $r=5$

即方程（1）的极坐标表示为 $r=5$。

（2） $\because\quad x^2+y^2+z^2-2z^2=r^2-2z^2$

$\therefore\quad x^2+y^2-z^2=r^2-2z^2=0$

即

$$\frac{z}{r}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由讲义§1公式（2）知

$$\varphi=\cos^{-1}\frac{z}{r}=\cos^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

$\therefore\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi=\frac{3}{4}\pi$

即方程（2）的极坐标表示为：$\varphi=\frac{\pi}{4}$ 和 $\varphi=\frac{3}{4}\pi$。

17.

解 将各点的直角坐标分别代入讲义§3公式（2）中，得

$$\rho_A=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\theta_A=\operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{3}\right)=\frac{3}{4}\pi \text{ 或 } \theta_A=\frac{7}{4}\pi$$

$$\rho_B=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$$

$$\theta_B=\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3} \text{ 或 } \theta_B=\frac{4}{3}\pi$$

$$\rho_C=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{48}{81}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

$$\theta_C=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-\frac{2}{9}\sqrt{3}}{-\frac{2}{3}}\right)=\frac{\pi}{6} \text{ 或 } \theta_C=\frac{7}{6}\pi$$

但因A点在第四卦限，所以$\theta_A=\frac{7}{4}\pi$。B点在第一卦限，所以$\theta_B=\frac{\pi}{3}$。C点在第七卦限，所以$\theta_C=\frac{7}{6}\pi$。从而点A,B,C

的柱面坐标为 $\left(3\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi, 3\right)$，$\left(4, \frac{\pi}{3}, 1\right)$，$\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{7}{6}\pi, -5\right)$。

18.

解 由讲义§3公式（1）得

$$x = 3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$y = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = 9$$

和

$$x = 2\cos\frac{5}{6}\pi = -\sqrt{3}$$

$$y = 2\sin\frac{5}{6}\pi = 1$$

$$z = 3$$

所以点A，B的直角坐标为$\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}, 9\right)$和（$-\sqrt{3}$, 1, 3）.

19.

解 （1）$\because \quad x - y = 0$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = 1$$

$$\therefore \quad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} = \mathrm{tg}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} \quad 或 \quad \theta = \frac{5}{4}\pi$$

于是，方程（1）的柱面坐标表示为：$\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{5}{4}\pi$。

（2）$\because \quad x^2 + y^2 = r^2 \ (r \geq 0)$

$\therefore \quad r = 2$

于是，方程（2）的柱面坐标表示为 $r = 2$。

20.

解 已知

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \\ \varphi &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\},$$

和

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

则 $\rho^2+z^2=(x^2+y^2)+z^2=r^2$

即 $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$

又 ∵ $\varphi=\cos^{-1}\frac{z}{r}=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$

且 $\theta=\theta$

所以用柱面坐标表示极坐标的变换式为：

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2+z^2} \\ \theta &= \theta \\ \varphi &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{aligned}\right\}$$

另一方面（图10），

∵ $\rho=r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=r\sin\varphi$

$z=r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=r\cos\varphi$

所以用极坐标表示柱面坐标的变换式为：

$$\left.\begin{aligned} \rho &= r\sin\varphi \\ \theta &= \theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}\right\}.$$

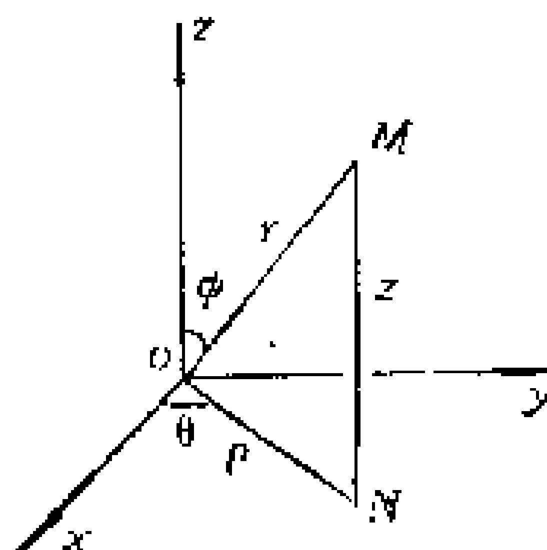


图 10

第二章　向量代数习题解答

1.

答　根据相等向量的定义知

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EF},\quad \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA},$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{OF}=\overrightarrow{DE}.$$

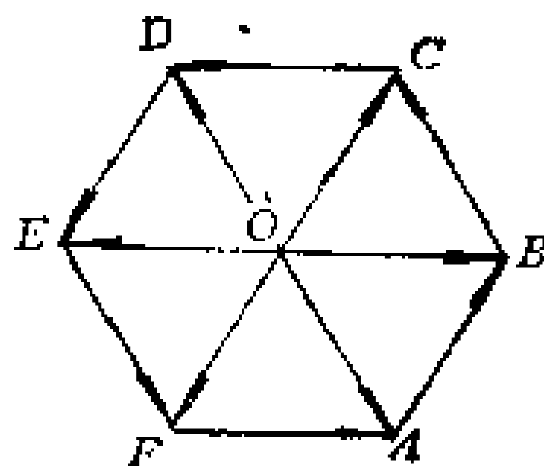


图 11

2.

解　由平行四边形的性质及相等向量的定义，在平行四边形的边上可作四组相等向量（图12）

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}.$$

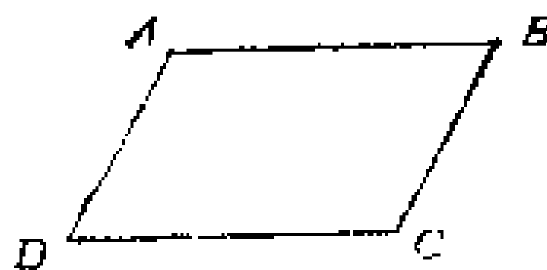


图 12

在等边三角形中，虽然它们的边长相等，但任意两条边的方向都不相同，所以在等边三角形中没有相等向量。

3.

解　如图13

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$$

$$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

$$=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

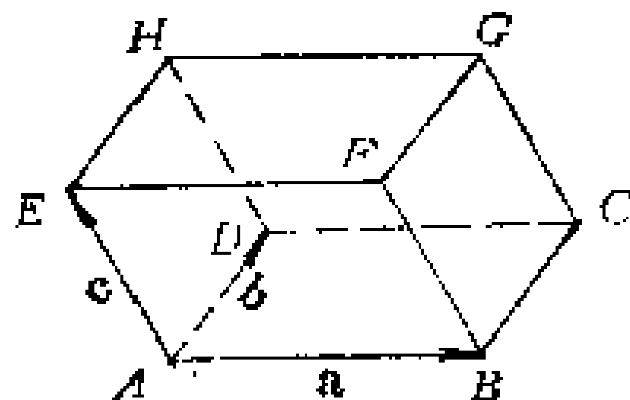


图 13

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$$

$$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$$

$$=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$$

即 $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{BH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，

$\overrightarrow{CE}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{DF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$。

4.

证 必要性：设三个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 构成一三角形，其顶点为A,B,C，令$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}=\overrightarrow{CA}$。由向量的加法定义得

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}=-\vec{c}$$

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$。

充分性：若 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

则 $-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

由向量的三角形法则知，以向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为边构成一三角形。

5.

解 因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$|\vec{a}+\vec{b}|$与$|\vec{a}-\vec{b}|$是以$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的矩形的两条对角线长，从而有

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$$

而 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

即 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13$。

6.

解 利用三角形的余弦定理（图14），有

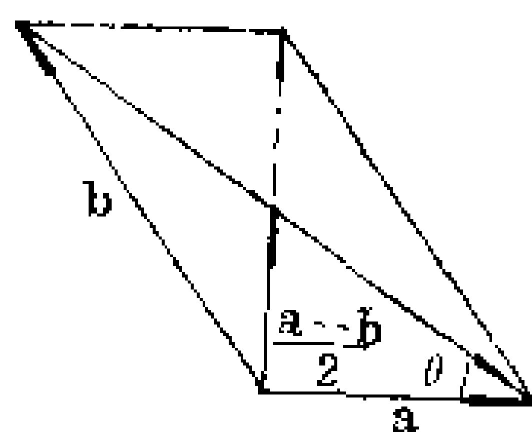


图 14

$$\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}\right)^2+|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}\cos\theta}$$

$$=\sqrt{225+121-330\cos\theta}$$

另一方面，又有

$$|\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{a}-\vec{b}|\cos\theta}$$

即

$$23=\sqrt{11^2+30^2-660\cos\theta}$$

由此解得

$$\cos\theta=\frac{492}{660}$$

将上式代入第一个等式中，并整理得

$$\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|=10$$

$$\therefore\quad|\vec{a}+\vec{b}|=20.$$

7.

解 以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边作平行四边形$OACB$，然后引两条对角线$\overline{AB}$，$\overline{OC}$，对角线交点记为D，则$\overline{OD}$，$\overline{DA}$，$\overline{AO}$构成一个三角形（图15）.

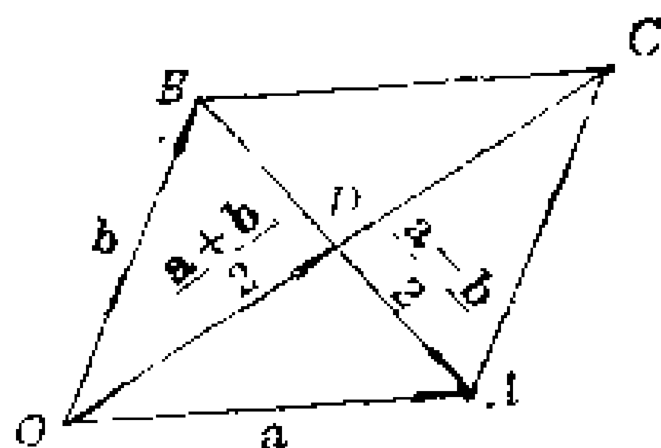


图 15

$$\because\quad\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$$

而

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{DA}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}.$$

8.

答 （1）向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$垂直.

（2）向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角是锐角。

（3）向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角是钝角。

（4）向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$方向相同。

（5）向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$方向相反.

（6）$|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相反。

9.

证 （1）$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ （图16）

$$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \qquad (1)$$

又$\because$ $$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) \qquad (3)$$

由（1）式得

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR} \qquad (4)$$

同理可证得

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR} \qquad (5)$$

由（4），（5）式知 $PQRS$ 为平行四边形。

（2）$\because$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

由（2）式得

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{PQ}$$

同理可得

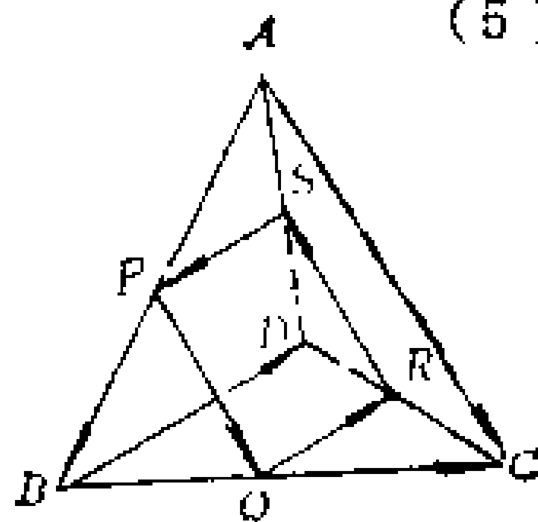


图 16

$$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{QR}$$

将以上二式取模后相加，再利用（4），（5）式，则得

$$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=2|\overrightarrow{PQ}|+2|\overrightarrow{QR}|$$

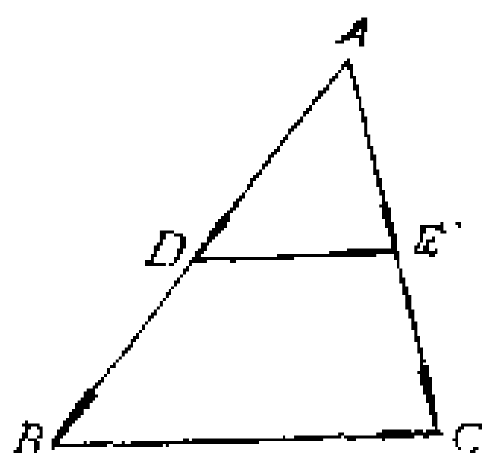
$$=|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{QR}|+|\overrightarrow{RS}|+|\overrightarrow{SP}|$$

即$PQRS$的周长等于$ABCD$的对角线长度之和.

10.

证 设D是AB边上的中点（图17），E是AC边上的中点，则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



17

$$\because\quad \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

而 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DE}$

由相等向量的定义可知，线段$\overline{BC}$平行于$\overline{DE}$且$\overline{BC}=2\overline{DE}$.

11.

证法一 $\because\ \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$（图18）

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}$$

$$=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}$$

$$=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

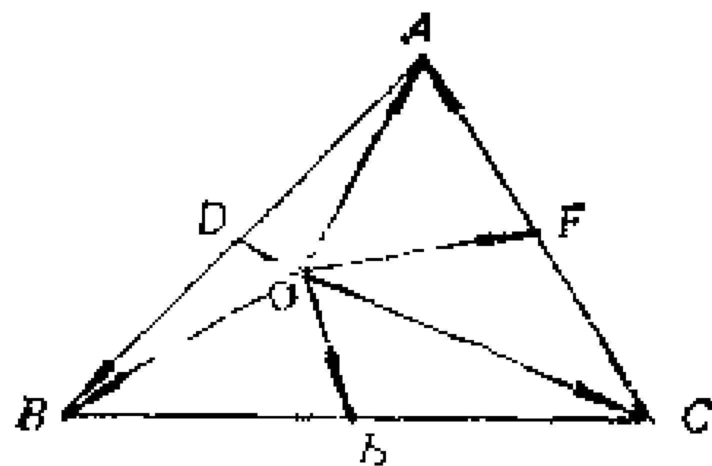


图 18

将以上三等式两端分别相加，得

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

$\because \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$

$\therefore \quad \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。

证法二 因为平行四边形的对角线互相平分，所以由向量加法定义得

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})$$

将以上三个等式相加得

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}。$$

12.

证 （1）设M为AC的中点（图19），由三角形的重心性质得

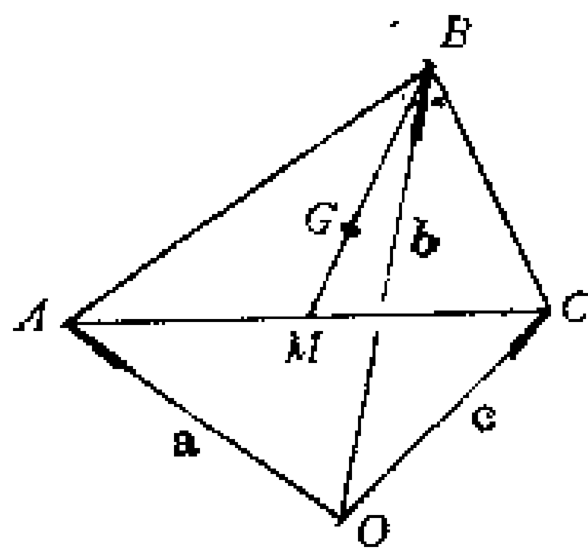


图 19

$$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$$

又 $\because \quad \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}$

而 $\quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

$$=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{c})$$

$\therefore \quad \overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{c})$

$$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

（2）∵ $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}=\vec{a}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}=\vec{b}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\vec{c}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

将以上三个等式两端相加，得

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\left[\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right]=\vec{0}$$

即 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

13.

分析 由初等几何知识知道，只有菱形的角平分线与对角线重合，若能求得两个模长相等且分别与向量$\vec{a}$，$\vec{b}$方向相同的向量，则可用向量的加法运算求得$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角平分线上的向量.

解 对于向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，各取它们的单位向量

$$\vec{a}^\circ=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\quad \vec{b}^\circ=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

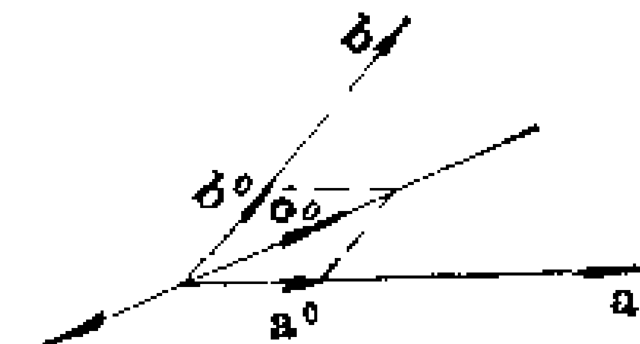


图 20

因为 $|\vec{a}^\circ|=|\vec{b}^\circ|$

所以 $\vec{a}^\circ+\vec{b}^\circ$ 是 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的角平分线上的向量．因而

$$\vec{c}^\circ=\pm\frac{\vec{a}^\circ+\vec{b}^\circ}{|\vec{a}^\circ+\vec{b}^\circ|}=\pm\frac{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}{\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}$$

$$= \pm \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{\left||\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\right|}$$

即$\vec{a}$，$\vec{b}$角平分线上存在两个方向相反的向量

$$\vec{c}^{\circ} = \pm \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{\left||\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\right|}.$$

14．

证 因为$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$不共面，所以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均不为零向量，而且它们可唯一地被$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$表示。

$$\because \quad \vec{a} + \vec{b} = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) + (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$= 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{2}(6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{c}$$

$\therefore$ $\vec{a} + \vec{b}$与$\vec{c}$共线。

15．

解

（1）因为对任意非零实数λ，均有

$$\lambda\vec{0} + 0\vec{a} = \vec{0}$$

所以线性相关。

（2）因为向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线的必要充分条件是它们线性相关，而现在$\vec{a}$，$\vec{b}$不平行．所以线性无关。

（3）由讲义§4的结论知，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$线性相关。

（4）当$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$不共面时，线性无关，否则线性相关。

（5）由于$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$两两平行，因而任意两个向量都线

性相关．所以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$也线性相关．

（6）由讲义 §4 的结论知，线性相关．

（7）同上．

（8）因为任意四个向量都线性相关，则对向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，存在不全为零的实数α，β，γ，δ，使得

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\vec{0}$$

从而有

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}+0\vec{e}=\vec{0}$$

由定义知：$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$线性相关．

16.

证 ∵ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=(-2\vec{a}+8\vec{b})+3(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}+5\vec{b}$

∴ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

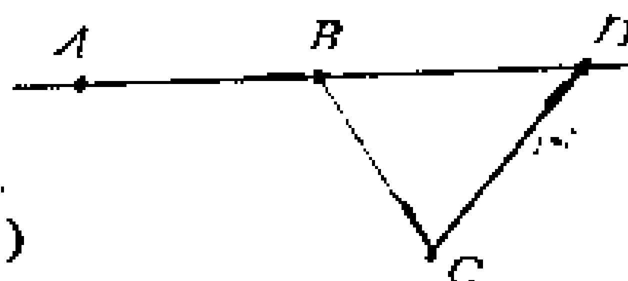


图 21

但因向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BD}$均含点B，所以点A，B，D在一条直线上（图21）．

17.

证 因为$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，所以点A，B，C，D不在一条直线上．

又∵ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=(\vec{a}+2\vec{b})-(4\vec{a}+\vec{b})-(5\vec{a}+3\vec{b})$

$=-2(4\vec{a}+\vec{b})$

∴ $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$

即四边形$ABCD$中的两个对边$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$平行，所以是梯形．

18.

分析　若证一组向量是否线性相关，关键是能否找到不全为零的一组数，而要找出这组实数，可先设向量线性相关，然后利用已知条件来求，若能求出不全为零的实数，则这组向量就线性相关，否则就线性无关。

解　设 $\lambda\vec{c}+\mu\vec{b}=\vec{0}$　　　　(1)

则

$$\lambda\vec{c}=2\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$\mu\vec{b}=4\mu\vec{a}-\mu\vec{b}$$

将上式两端相加，并利用（1）式及 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线的条件，得

$$\left.\begin{aligned}2\lambda+4\mu=0\\ \lambda-\mu=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

因为(2)式只有零解，即 $\lambda=\mu=0$，所以向量 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 线性无关。

19.

证　∵ $p\vec{a}=pm\vec{e}_1-pn\vec{e}_2$

$$n\vec{b}=np\vec{e}_2-nm\vec{e}_3$$

$$m\vec{c}=mn\vec{e}_3-mp\vec{e}_1$$

将上式两端分别相加，则得

$$p\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}=\vec{0}$$

即向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性相关，由§4结论知，向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面。

20.

解　∵ $\vec{m}-\vec{p}=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b})$

$$=-2\vec{b}+\vec{c}\qquad(1)$$

$$\vec{n}-\vec{q}=\left(\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}\right)-(\vec{b}-\vec{c})=\frac{3}{2}\vec{c}\qquad(2)$$

$$2\vec{n}+\vec{q}=2\left(\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}\right)+(\vec{b}-\vec{c})=3\vec{b} \qquad (3)$$

由（2）、（3）式得

$$\vec{c}=\frac{2}{3}(\vec{n}-\vec{q}),\quad \vec{b}=\frac{1}{3}(2\vec{n}+\vec{q})$$

$$\therefore\quad \vec{m}-\vec{p}=-\frac{2}{3}(2\vec{n}+\vec{q})+\frac{2}{3}(\vec{n}-\vec{q})$$

整理后得

$$3\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}+4\vec{q}=\vec{0}.$$

21.

证　必要性：设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的终点在一条直线上（图22），则

$$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

而 $$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\therefore\quad \vec{c}-\vec{a}=\alpha\vec{b}-\alpha\vec{a}$$

或 $$\vec{c}=(1-\alpha)\vec{a}+\alpha\vec{b}$$

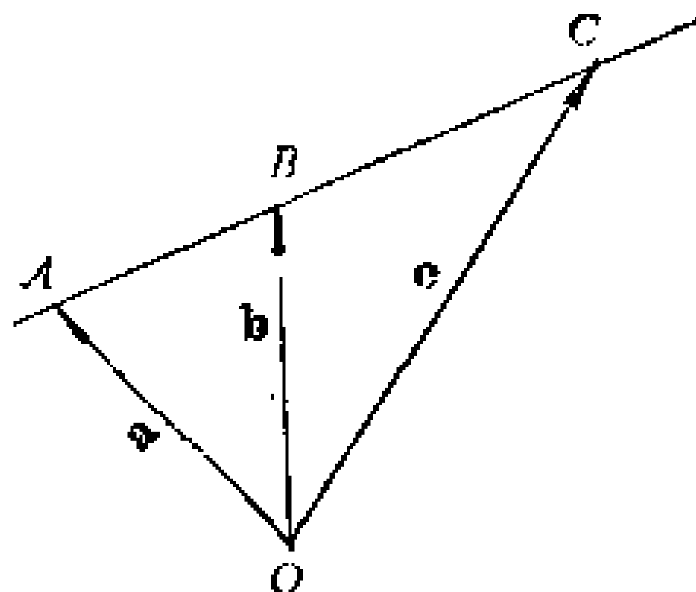


图 22

另一方面，由题设

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

根据分解系数的唯一性得

$$\lambda=1-\alpha$$

$$\mu=\alpha$$

消去α得

$$\lambda+\mu=1.$$

充分性：若 $\lambda+\mu=1$

则 $\qquad \vec{c} = (1-\mu)\vec{a} + \mu\vec{b}$

或 $\qquad \vec{c} - \vec{a} = \mu(\vec{b} - \vec{a})$

即 $\qquad \overrightarrow{AC} = \mu\overrightarrow{AB}$

又因为向量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$有共同始点A，所以向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的终点 A，B，C 在一条直线上。

22.

解 设$\vec{S} = \lambda\vec{m} + \mu\vec{n} + \nu\vec{p}$ （1）

则
$$\vec{S} = \lambda(\vec{e_1} + \vec{e_2} - 2\vec{e_3}) + \mu(\vec{e_1} - \vec{e_2}) + \nu(2\vec{e_2} + 3\vec{e_3})$$
$$= (\lambda + \mu)\vec{e_1} + (\lambda - \mu + 2\nu)\vec{e_2} + (-2\lambda + 3\nu)\vec{e_3}$$

另一方面，由题设
$$\vec{S} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$$

根据分解系数的唯一性得
$$\left.\begin{aligned} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda - \mu + 2\nu &= 1 \\ -2\lambda + 3\nu &= 1 \end{aligned}\right\}$$

由此解得
$$\lambda = \frac{2}{5}, \quad \mu = \frac{3}{5}, \quad \nu = \frac{3}{5}$$

代入（1）式中，得
$$\vec{S} = \frac{2}{5}\vec{m} + \frac{3}{5}\vec{n} + \frac{3}{5}\vec{p}.$$

23.

证 必要性：设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$线性相关，则存在不全为零的数λ与μ，使得
$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$$

即 $\qquad \lambda(\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}) + \mu(\beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2}) = \vec{0}$

或 $\qquad (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\vec{e_1} + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\vec{e_2} = \vec{0}$

因为向量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$线性无关，所以

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=0$$
$$\lambda\alpha_2-\mu\beta_2=0$$

由于λ与μ不全为零，不妨设 $\lambda\neq0$，则从以上二等式中消去μ，得

$$\lambda(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=0$$

即 $$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0。$$

充分性：若 $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$

则 $$\alpha_1=\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_2}$$

从而有

$$\vec{a}=\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_2}\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}$$

故 $$\beta_2\vec{a}=\alpha_2\beta_1\vec{e_1}+\alpha_2\beta_2\vec{e_2}=\alpha_2(\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2})=\alpha_2\vec{b}$$

即 $$\beta_2\vec{a}-\alpha_2\vec{b}=\vec{0}$$

由于β_2、α_2全不为零，于是向量$\vec{a}$，$\vec{b}$线性相关。

24.

解 设各边上的点所截成的线段（图23）之比为

$$\lambda=\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}\qquad\mu=\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}\qquad\nu=\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}}$$

则 $$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB},\quad\overrightarrow{BL}=\mu\overrightarrow{BC},\quad\overrightarrow{CM}=\nu\overrightarrow{CA}$$

因而 $$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\nu\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}$$

将以上三个等式两端分别相加，得

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}+\nu\overrightarrow{CA}$$

$\because \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$ （1）

$\therefore \quad \overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}+\nu\overrightarrow{CA}$ （2）

若以向量$\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$和$\overrightarrow{CN}$为边构成一三角形，则

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{0}$$

$\therefore \ \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}+\nu\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$

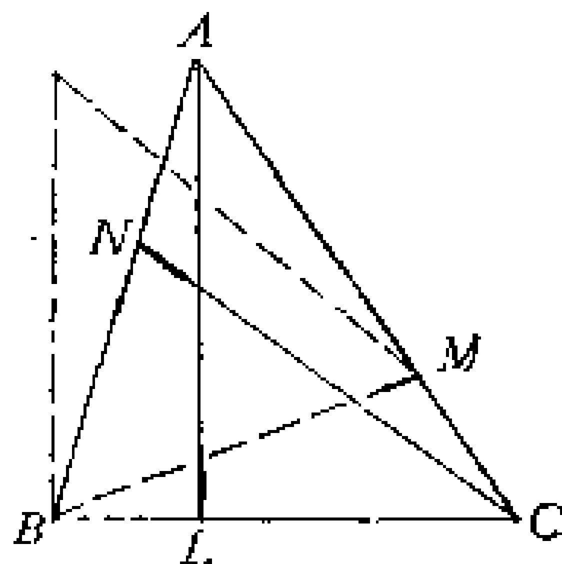


图 23

利用（1）式，得

$$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}+\nu(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{0}$$

或 $\qquad (\lambda-\nu)\overrightarrow{AB}=(\nu-\mu)\overrightarrow{BC}$

但$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$不共线，所以

$$\lambda-\nu=0,\quad \nu-\mu=0$$

即 $\qquad \lambda=\mu=\nu$

从而得出结论：若向量$\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$构成三角形，则在各边上取的分点L，M，N所截成的线段与边成定比，即

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} \qquad (*)$$

反之，若此结论成立，则由（2）式得

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

利用条件（1）知，

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{0}$$

即点L，M，N的取法若满足(*)式，则以向量$\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$和$\overrightarrow{CN}$为边可构成一三角形。

25.

证 延长线段$\overline{AP}$交$\overline{BC}$于D（图24），设$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AD}$，因为点$P$在$\triangle ABC$上，所以$0\leqslant m\leqslant 1$。同理，设

$$\overrightarrow{BD}=n\overrightarrow{BC} \qquad 0\leqslant n\leqslant 1$$

$\because \quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+m\overrightarrow{AD}$

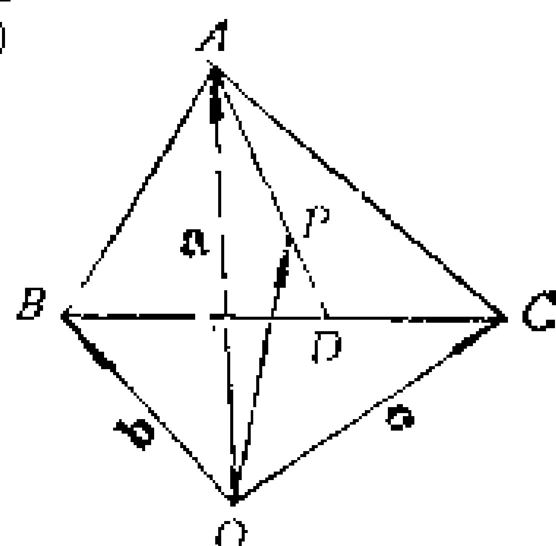


图 24

而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

$$=\vec{b}-\vec{a}+n(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=(1-n)\vec{b}-\vec{a}+n\vec{c}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{OP}=\vec{a}+m[(1-n)\vec{b}-\vec{a}+n\vec{c}]$

$$=(1-m)\vec{a}+m(1-n)\vec{b}+mn\vec{c}$$

又 $\because \quad \overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$

由分解系数的唯一性，得

$$\lambda=1-m$$

$$\mu=m(1-n)$$

$$\nu=mn$$

则

$$\lambda+\mu+\nu=1-m+m(1-n)+mn=1$$

即 $\quad \lambda+\mu+\nu=1.$

26.

解 由射影的定义知

$$射_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$$

因为已知

$$|\vec{a}|=10，\varphi=\frac{\pi}{3}$$

所以 $\quad 射_l\vec{a}=10\cos\frac{\pi}{3}=5.$

27.

解 由 $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$

得 $\quad 射_l\vec{d}=射_l(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})$

$$=射_l\vec{a}+2射_l\vec{b}+3射_l\vec{c}$$

而

$$射_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$射_l\vec{b} = |\vec{b}|\cos 2\varphi = \cos\frac{2}{6}\pi = \frac{1}{2}$$

$$射_l\vec{c} = |\vec{c}|\cos 3\varphi = \cos\frac{3}{6}\pi = 0$$

则 $$射_l\vec{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3\times 0 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

即 $$射_l\vec{d} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

28.

解 虽然

$$射_l\vec{a} + 射_l\vec{b} - 射_l\vec{c} + 射_l\vec{d} = 5 - 3 - 8 + 6 = 0$$

但是由此不能断定向量$\vec{a}$，$\vec{b}$、$\vec{c}$，$\vec{d}$构成封闭折线，因为若

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{n}$$

而$\vec{n} \neq \vec{0}$，且$\vec{n}$垂直于轴l，则

$$射_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = 射_l\vec{n} = |\vec{n}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

由此可知，当向量$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \neq \vec{0}$，即$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$不构成封闭折线时，其射影之和也可能为零。

29.

解 设$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$为垂直于两个轴的向量，则

$$射_l\vec{d} = 射_m\vec{d} = 0$$

即
$$\begin{aligned}
&射_l(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c})\\
&= \lambda射_l\vec{a} + \mu射_l\vec{b} + \nu射_l\vec{c}\\
&= 2\lambda - \mu + 5\nu\\
&= 0 \qquad\qquad (1)
\end{aligned}$$

和 $$射_m(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c})$$

$=\lambda 射_m \vec{a}+\mu 射_m \vec{b}+\nu 射_m \vec{c}$

$=-3\lambda+2\mu+4\nu$

$=0$ （2）

联立（1）、（2）式

$$\begin{cases} 2\lambda-\mu+5\nu=0 \\ -3\lambda+2\mu+4\nu=0 \end{cases}$$

解得

$\lambda=-14\nu,\ \mu=-23\nu$

所以，同时垂直于两轴 l、m 的向量为

$\vec{d}=\nu(-14\vec{a}-23\vec{b}+\vec{c})$，其中$\nu$为任意非零实数。

30.

证 设

$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$ （1）

则有

$射_l(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c})=射_l\vec{0}=0$

即

$3\lambda+2\mu+2\nu=0$ （2）

$射_m(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c})=射_m\vec{0}=0$

即

$9\lambda-4\mu+8\nu=0$ （3）

$射_n(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c})=射_n\vec{0}=0$

即

$0\lambda-5\mu+\nu=0$ （4）

由方程组（2）、（3）、（4）式解得

$\lambda=-4\mu,\ \nu=5\mu$

代入（1）式中并消去μ，得

$-4\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ （5）

由此可知，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$线性相关，其线性关系式为

（5）式。

31.

解 （1）由两点间距离公式得

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6-4)^2+(2+7)^2+(z-1)^2} = 11$$

即

$$(z-1)^2 = 36$$

于是求得 $z = \pm 6 + 1$。

（2）$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-2)^2+(-2-3)^2+(4-4)^2} = 5$

即

$$(x-2)^2 = 0$$

于是求得 $x = 2$。

（3）$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-7)^2+(y-0)^2+(5-10)^2} = 3$

即

$$y^2 = -16$$

由上式可知，此题无实数解。

32.

解 设向量 $\vec{a}$ 的起点坐标为 (x, y, z)，因为向量的坐标是其终点坐标与起点坐标之差，所以有

$$2 - x = 4$$
$$-1 - y = -4$$
$$7 - z = 7$$

由此解得

$$x = -2,\ y = 3,\ z = 0$$

而

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+(-4)^2+7^2} = \sqrt{81} = 9$$

所以向量 $\vec{a}$ 的起点坐标为(−2，3.0)，$|\vec{a}| = 9$。

33.

解 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{5+1, -7-5, 8+10\}$

$=\{6,-12,18\}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\{5-2,-4-2,2+7\}$

$=\{3,-6,9\}$

$\because\quad \overrightarrow{AB}=2\{3,-6,9\}=2\overrightarrow{CD}$

$\therefore\quad \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}\qquad (*)$

即向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，其关系式为(*)式.

34.

解 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(3-1)^2+(-5+1)^2+(8+z)^2}$

$=\sqrt{(8+z)^2+20}$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(3+1)^2+(-5-1)^2+(8-z)^2}$

$=\sqrt{(8-z)^2+52}$

$\because\quad |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

$\therefore\quad \sqrt{(8+z)^2+20}=\sqrt{(8-z)^2+52}$

由此解得

$z=1.$

35.

解 (1)$\because\quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OC}$

即

$\overrightarrow{OD}=\{-2,1,-3\}+2\{4,-1,3\}-2\{2,-1,-2\}$

$=\{2,1,7\}$

$\therefore$ 点D的坐标为(2，1，7).

(2)$\because\quad \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}=\{x,3,z\}-\{4,-1,3\}$

$=\{x-4,4,z-3\}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\{2,-1,-2\}-\{-2,1,-3\}$

$=\{4,-2,1\}$

而已知

$$\overrightarrow{AF}=y\overrightarrow{BC}$$

$\therefore\quad \{x-4,4,z-3\}=y\{4,-2,1\}$

由向量坐标的唯一性，得

$$\left.\begin{aligned} x-4&=4y\\ 4&=-2y\\ z-3&=y\end{aligned}\right\}$$

由上述方程组解得

$$x=-4,\ y=-2,\ z=1.$$

36.

解　由13题结果知

$$\overrightarrow{c}^{\circ}=\pm\frac{|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}}{\left||\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}\right|}$$

而

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{49}=7$$

$$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

则

$$|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}=3\{2,-3,6\}=\{6,-9,18\}$$

$$|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}=7\{-1,2,-2\}=\{-7,14,-14\}$$

$$|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}=\{6,-9,18\}+\{-7,14,-14\}=\{-1,5,4\}$$

$$\left||\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+5^2+4^2}=\sqrt{42}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{c}=|\overrightarrow{c}|\overrightarrow{c}^{\circ}=\pm3\sqrt{42}\frac{1}{\sqrt{42}}\{-1,5,4\}$$

$$=\{\mp3,\pm15,\pm12\}$$

即$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$夹角平分线上的向量为$\overrightarrow{c}=\{\mp3,\pm15,\pm12\}$.

37.

解　（1）设重心坐标为$P(x,y,z)$

$\because\quad \overrightarrow{OA}=\{4,-2,-1\},\quad \overrightarrow{OB}=\{1,1,2\}$

$\overrightarrow{OC}=\{1,-3,6\},\quad \overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$

由12题（1）的结论得

$$\overrightarrow{OP}\ \ \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

即

$$\{x,y,z\}=\frac{1}{3}[\{4,-2,-1\}+\{1,1,2\}+\{1,-3,6\}]$$

$$=\frac{1}{3}\{6,-4,7\}$$

$$=\left\{2,-\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right\}$$

$\therefore$ 重心坐标为 $P\left(2,-\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$。

（2）由定比分点公式得

$$x=\frac{4+3\times 1}{1+3}=\frac{7}{4}$$

$$y=\frac{-2+3\times 1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

$$z=\frac{-1+3\times 2}{1+3}=\frac{5}{4}$$

即内分点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$。

38.

解 设点 A，B 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，因为点 C，D 分 $\overline{AB}$ 为三等份，所以点 C 是线段 $\overline{AD}$ 的中点，点 D 是线段 $\overline{CB}$ 的中点，则由中点坐标公式得

$$2=\frac{x_1+5}{2},\quad 0=\frac{y_1-2}{2},\quad 2=\frac{z_1+0}{2}$$

及

$$5=\frac{2+x_2}{2},\quad -2=\frac{0+y_2}{2},\quad 0=\frac{2+z_2}{2}$$

解得

$$x_1=-1,\ y_1=2,\ z_1=4$$

$$x_2=8,\ y_2=-4,\ z_2=-2$$

即端点A，B的坐标分别为$(-1,2,4)$和$(8,-4,-2)$。

39.

解 （1）因为

$$\cos^2 55°+\cos^2 60°+\cos^2 120°<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

所以不能作为向量的方向角。

（2）因为

$$\cos^2 45°+\cos^2 135°+\cos^2 60°=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>1$$

所以不能作为向量的方向角。

（3）因为

$$\cos^2 90°+\cos^2 150°+\cos^2 60°=0+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

所以可作为向量的方向角。

40.

解 依题意知

$$\alpha=\pi-\theta,\ \beta=\theta,\ \gamma=\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\because$ $\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

即 $3\cos^2\theta=1$

$\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

41.

解 $\because$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{5-2,\ 1-5,\ 11+1\}$

$=\{3,\ -4,\ 12\}$

$\therefore$ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{3}{13},\ \cos\beta = \frac{-4}{13},\ \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

42.

解 设向量$\vec{a}$与Oz轴的夹角为γ，则

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\gamma = 1$$

即

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cos^2\gamma = 1$$

由此解得

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$$

$$\because \quad \vec{a}^\circ = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right\}$$

而 $\vec{a} = |\vec{a}|\ \vec{a}^\circ$

$$\therefore \quad \vec{a} = 2\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \{\sqrt{2},\ 1,\ \pm 1\}.$$

43.

解 设$\vec{d} = \alpha\vec{c}$，其中α为正实数。

则
$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$
$$= \lambda\{3,\ 2,\ 4\} + \mu\{-1,\ 1,\ 2\}$$
$$= \{3\lambda - \mu,\ 2\lambda + \mu,\ 4\lambda + 2\mu\}$$

而
$$\alpha\vec{c} = \alpha\{1,\ 4,\ 8\} = \{\alpha,\ 4\alpha,\ 8\alpha\}$$

由向量坐标的唯一性，得

$$3\lambda - \mu = \alpha$$
$$2\lambda + \mu = 4\alpha$$
$$4\lambda + 2\mu = 8\alpha$$

由以上三个等式解得

$$\mu = 2\lambda \quad (\lambda > 0)$$

即当$\mu = 2\lambda(\lambda > 0)$时，向量$\vec{d}$与$\vec{c}$同向。

44.

证 （1）由向量的数量积定义得

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

而 $$-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$$

$$\therefore \quad -|\vec{a}|\,|\vec{b}| \leqslant \vec{a}\,\vec{b} \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|.$$

（2）由$\vec{d} = (\vec{a}\,\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}$得

$$\begin{aligned}\vec{a}\,\vec{d} &= \vec{a}[(\vec{a}\,\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}]\\ &= (\vec{a}\,\vec{b})\vec{a}\,\vec{c} - (\vec{a}\,\vec{c})\vec{a}\,\vec{b}\\ &= (\vec{a}\,\vec{b})(\vec{a}\,\vec{c}) - (\vec{a}\,\vec{b})(\vec{a}\,\vec{c})\\ &= 0\end{aligned}$$

即

$$\vec{a}\,\vec{d} = 0$$

而向量$\vec{a}$，$\vec{d}$为非零向量

$$\therefore \quad \vec{a} \perp \vec{d}.$$

45.

证 以菱形的相邻两边作二向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，则菱形的二对角线向量为$\vec{a} + \vec{b}$与$\vec{a} - \vec{b}$，且

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

而

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a}^2 + \vec{b}\,\vec{a} - \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2\\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

即 $$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

所以，菱形的二对角线互相垂直。

46.

解　由已知

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}=0$$

因而

$$|\vec{d}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2}$$

$$=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a})}$$

$$=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}$$

$$=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$$

$$=\sqrt{14}$$

即

$$|\vec{d}|=\sqrt{14}$$

设向量 $\vec{d}$ 与三向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的夹角分别为 φ_1, φ_2, φ_3, 则有

$$\cos\varphi_1=\frac{\vec{d}\vec{a}}{|\vec{d}|\ |\vec{a}|}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{a}}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{|\vec{a}|^2}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\varphi_2=\frac{\vec{d}\vec{b}}{|\vec{d}|\ |\vec{b}|}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{b}}{\sqrt{14}\,|\vec{b}|}$$

$$=\frac{|\vec{b}|}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\varphi_3=\frac{\vec{d}\vec{c}}{|\vec{d}|\ |\vec{c}|}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{c}}{\sqrt{14}\,|\vec{c}|}$$

$$= \frac{|\vec{c}|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

即

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\varphi_3 = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

47.

解 （1）由垂直条件得

$$(\vec{a} + 3\vec{b})(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$$

$$(\vec{a} - 4\vec{b})(7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$

将以上二式展开后整理得

$$7\vec{a}^2 + 16\vec{a}\vec{b} - 15\vec{b}^2 = 0 \qquad (1)$$

$$7\vec{a}^2 - 30\vec{a}\vec{b} + 8\vec{b}^2 = 0 \qquad (2)$$

由（1）、（2）式消去$\vec{a}^2$项，得

$$46\vec{a}\vec{b} - 23\vec{b}^2 = 0$$

或

$$|\vec{b}|^2 = 2\vec{a}\vec{b} \qquad (3)$$

再由（1）、（2）式消去$\vec{b}^2$项，得

$$161|\vec{a}|^2 - 322\vec{a}\vec{b} = 0$$

或

$$|\vec{a}|^2 = 2\vec{a}\vec{b} \qquad (4)$$

由（3）、（4）式，得

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \qquad (5)$$

因而

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{2}$$

所以 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

（2）$\because \quad |\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\sqrt{7})^2=28$

而

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}^2$$

$\therefore \quad 2\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$$=4^2+2^2-28$$

$$=-8$$

即

$$\vec{a}\,\vec{b}=-4$$

另一方面，由定义得

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

即

$$-4=4\times2\times\cos\theta$$

$\therefore \quad \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \theta=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$。

48.

解　（1）$\because$　射$_{\vec{b}}\vec{a}=(\vec{a}\,\vec{b})^{\circ}=\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$

而

$$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\vec{a}\,\vec{b}=8\times2+4\times(-2)+1\times1=9$$

$\therefore \quad$ 射$_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{9}{3}=3$。

（2）因向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，由垂直条件

$$\vec{a}\,\vec{b}=(-2)\times(-1)+1\times0+z\times3=0$$

即

$$2+3z=0$$

$\therefore \quad z = -\dfrac{2}{3}.$

(3) $\because \quad \cos^2 60° + \cos^2 120° + \cos^2\gamma = 1$

即

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1$$

$\therefore \quad \cos\gamma = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

由于γ为钝角，于是 $\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

则轴 l 的单位向量为

$$\vec{l}^{\circ} = \left\{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

而

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{2-3, 5+4, -2+2\}$$
$$= \{-1, 9, 0\}$$

$\therefore$ 射$_l\overrightarrow{AB} = \vec{l}^{\circ}\overrightarrow{AB} = -1\times\dfrac{1}{2} + 9\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$+ 0\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5$$

即向量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的射影为 -5。

49.

解 $\because \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$\therefore \quad (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$

即 $\quad \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}) = 0$

$\therefore \quad \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a} = \dfrac{-1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)$

由于$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量

$\therefore \quad \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a} = -\dfrac{3}{2}.$

50.

证（1）在△OAB中（图25），设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为$\theta$。则有

$$\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\because \quad |\vec{c}|^2=\vec{c}^2=(\vec{b}-\vec{a})^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}$$

而 $$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

$$\therefore \quad |\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

若令

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c$$

则有 $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

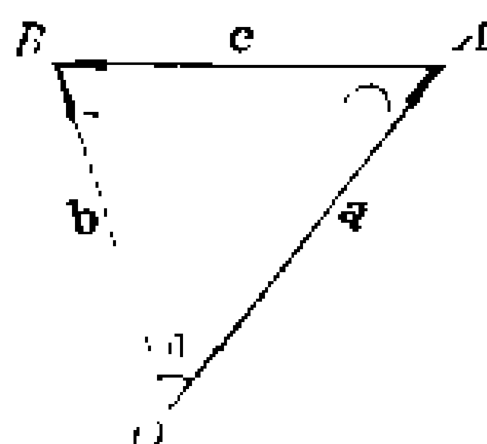


图 25

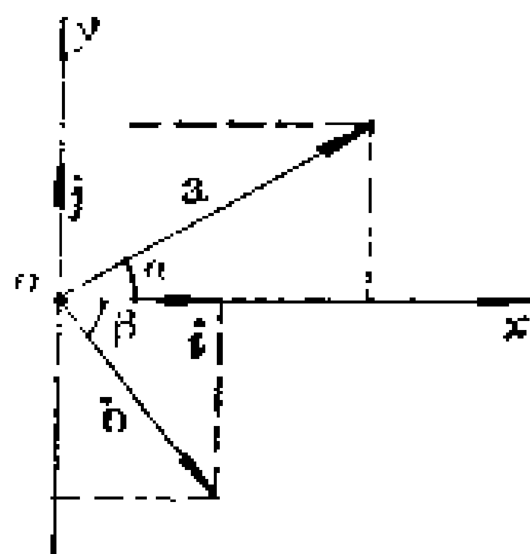


图 26

（2）设向量$\vec{a}$与Ox轴的夹角为α，向量$\vec{b}$与Ox轴的夹角为β，且$\vec{b}$取在Ox轴的下方（图26），$\vec{a}$取在Ox轴的上方，则有

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{i}+|\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{b}=|\vec{b}|\cos\beta\,\vec{i}-|\vec{b}|\sin\beta\,\vec{j}$$

从而有

$$\vec{a}\vec{b}=(|\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{i}+|\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{j})(|\vec{b}|\cos\beta\,\vec{i}-|\vec{b}|\sin\beta\,\vec{j})$$

$$= |\vec{a}|\ |\vec{b}|(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \qquad (1)$$

另一方面，由定义得

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos(\alpha+\beta) \qquad (2)$$

由（1）、（2）两式得

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

51.

证 先求向量$\vec{x}$

$\because$ $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\therefore$ $|\vec{x}|^2 = (\vec{a} + \lambda\vec{b})^2$

$$= |\vec{a}|^2 + \lambda^2|\vec{b}|^2 + 2\lambda\vec{a}\,\vec{b}$$

而 $|\vec{a}|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$

$$|\vec{b}|^2 = 3^2 + (-4)^2 + 5^2 = 50$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 1\times3 - 1\times(-4) + 1\times5 = 12$$

$\therefore$ $|\vec{x}|^2 = 3 + 50\lambda^2 + 24\lambda$

经配方得

$$|\vec{x}|^2 = 50\left(\lambda + \frac{6}{25}\right)^2 + \frac{3}{25}$$

由此可知，当 $\lambda = -\frac{6}{25}$时，模 $|\vec{x}|$ 为最小。

$\therefore$ $\vec{x} = \vec{a} - \frac{6}{25}\vec{b}$

$$= \{1, -1, 1\} - \frac{6}{25}\{3, -4, 5\}$$

$$= \left\{\frac{7}{25}, \frac{-1}{25}, \frac{-5}{25}\right\}$$

即 $\vec{x} = \left\{\frac{7}{25}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}\right\}$

将向量$\vec{x}$与向量$\vec{b}$作数量积

$$\vec{x}\cdot\vec{b}=\frac{7}{25}\times 3+\frac{1}{25}\times(-4)-\frac{1}{5}\times 5=0$$

即

$$\vec{x}\cdot\vec{b}=0$$

所以使模最小的向量$\vec{x}=\vec{a}-\frac{6}{25}\vec{b}$垂直于向量$\vec{b}$。

52.

解　依题意知，力

$$\vec{f}=100\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\{50,50,50\sqrt{2}\}$$

而位移

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\{2-1,5-2,1+3\sqrt{2}-1\}$$
$$=\{1,3,3\sqrt{2}\}$$

因此功

$$W=\vec{f}\cdot\overrightarrow{PQ}=50\times 1+50\times 3+50\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=500$$

即力所作的功为W = 500（尔格）。

53.

解　由向量积的定义知

（1）、（4）组向量符合右手系。

（2）、（3）、（6）组向量符合左手系。

（5）组的三个向量共面，从而不能确定左右手系。

54.

解　（1）　$(\vec{a}\times\vec{b})^2=|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(|\vec{a}|\ |\vec{b}|\sin\varphi)^2$

$$=\left(1\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3$$

即

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2=3.$$

（2）　$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$

$$=2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{a}\times 2\vec{b}+\vec{b}\times 2\vec{b}$$

$$=\vec{b}\times\vec{a}+4\vec{a}\times\vec{b}$$

$$=3\vec{a}\times\vec{b}$$

利用（1）题结果，得

$$[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2$$

$$=(3\vec{a}\times\vec{b})^2$$

$$=9(\vec{a}\times\vec{b})^2$$

$$=27.$$

（3）$\because\quad(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})$

$$=3\vec{a}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{b}$$

$$=-10\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\therefore\quad|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})|=|-10\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$=10|\vec{a}\times\vec{b}|=10\sqrt{3}.$$

55.

解法一 $\because\quad\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=-\dfrac{3}{5}$

$$\therefore\quad\sin\varphi=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

因而

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=1\times5\times\frac{4}{5}=4$$

解法二 $\because\quad|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi)^2$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\varphi)$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2$$

$$=16$$

$\therefore \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{16} = 4$。

56.

证 （1）由定义得

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\sin^2\varphi$$

$$(\vec{a}\,\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\cos^2\varphi$$

由此二等式得

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 + (\vec{a}\,\vec{b})^2$$

$$= |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\sin^2\varphi + |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\cos^2\varphi$$

$$= |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2$$

即

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 + (\vec{a}\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2.$$

（2）当 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 中至少有一个是零向量时，向量 $\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{p}$ 显然共面。若设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 均不是零向量，则由向量积的定义知

$$\vec{m}\perp\vec{d},\quad \vec{n}\perp\vec{d},\quad \vec{p}\perp\vec{d}$$

即向量 $\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{p}$ 同时平行于与向量 $\vec{d}$ 垂直的平面，所以 $\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{p}$ 共面。

57.

解（1）$\because \quad \vec{a}\times\vec{b} = \left\{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 6\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right\}$

$$= \{-15, -10, 10\}$$

$\therefore \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-15)^2+(-10)^2+10^2} = \sqrt{425}$

而

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = 7$$

则

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}=\frac{\sqrt{425}}{3\times7}=\frac{\sqrt{425}}{21}$$

所以 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{425}}{21}$，面积为 $S=\sqrt{425}$。

（2）∵ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{3-1,0-2,-3-0\}$

$=\{2,-2,-3\}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{5-1,2-2,6-0\}$

$=\{4,0,6\}$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\begin{vmatrix}-2&-3\\0&6\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3&2\\6&4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2&-2\\4&0\end{vmatrix}^2}$$

$=28$

而面积

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{28}{2}=14$$

所以$\triangle ABC$的面积为 $S=14$。

（3）$\vec{a}+\vec{b}=\{2,1,-1\}+\{1,-2,1\}=\{3,-1,0\}$

$\vec{a}-\vec{b}=\{2,1,-1\}-\{1,-2,1\}=\{1,3,-2\}$

由于

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=3\times1-1\times3+0\times(-2)=0$$

而由定义

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}|\ |\vec{a}-\vec{b}|\cos\varphi$$

则有 $\cos\varphi=0$

∴ $\sin\varphi=1$。

58.

解 设 $\vec{x}=\{x,y,z\}$，则依题意得

$$\left.\begin{aligned}2x-3y+z&=0\\x-2y+3z&=0\\x+2y-7z&=10\end{aligned}\right\}$$

由上述方程组解得

$$x=7,\ y=5,\ z=1$$

$\therefore\quad \vec{x}=\{7,\ 5,\ 1\}$.

59.

证　必要性：已知

$$\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1=\vec{0}$$

则

$$\vec{r}_2\times\vec{r}_3-\vec{r}_1\times\vec{r}_3-\vec{r}_2\times\vec{r}_1+\vec{r}_1\times\vec{r}_1=\vec{0}$$

即

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=\vec{0}$$

由此可知，向量$\vec{r}_2-\vec{r}_1$与$\vec{r}_3-\vec{r}_1$共线，但因二向量$\vec{r}_2-\vec{r}_1$与$\vec{r}_3-\vec{r}_1$有共同始点，所以$\vec{r}_2-\vec{r}_1$与$\vec{r}_3-\vec{r}_1$在一条直线上，因而三个向量$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$的终点在同一条直线上（图27）。

充分性：若向量$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$的终点在同一条直线上，则有

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=\vec{0}$$

即

$$\vec{r}_2\times\vec{r}_3-\vec{r}_1\times\vec{r}_3-\vec{r}_2\times\vec{r}_1+\vec{r}_1\times\vec{r}_1=\vec{0}$$

由向量积的性质，上式变为

$$\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1+\vec{r}_1\times\vec{r}_2=\vec{0}.$$

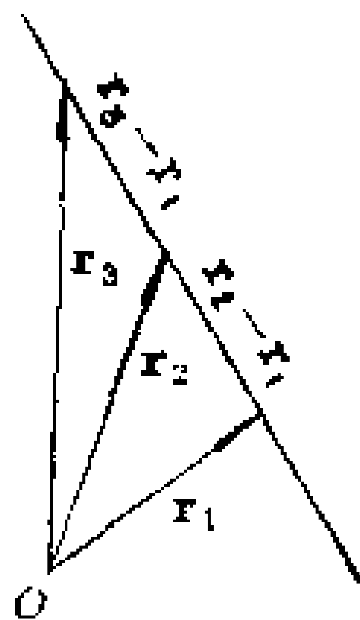


图 27

60.

解　(1)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2&-1&5\\-1&3&0\\3&1&-2\end{vmatrix}=-12-5-45+2=-60$$

即 $\qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

(2) ∵ $\qquad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{3,\ 6,\ 3\}$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{1,\ 3,\ -2\}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\{2,\ 2,\ 2\}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-18$$

而四面体体积V是平行六面体体积的六分之一，则

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|=\frac{18}{6}=3$$

即 $\qquad V=3$.

(3) ∵ $\qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos\varphi_1$

而由已知，向量$\vec{c}$同时垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$，则 $\varphi_1=0$，或$\varphi_1=\pi$。即

$$\cos\varphi_1=\pm 1$$

另一方面

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=6\times3\times\frac{1}{2}=9$$

$$\therefore \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=9\times3\times(\pm1)=\pm27$$

即 $\qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm 27$.

61.

解 ∵ $\qquad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{2,\ -2,\ -3\}$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{4,\ 0,\ 6\}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\{-7,\ -7,\ 7\}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}=308$$

又∵ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix}-2&-3\\0&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&2\\6&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-2\\4&0\end{vmatrix}\right\}$

$$=\{-12,\ -24,\ 8\}$$

∴ $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=28$

而

$$h=\frac{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\frac{308}{28}=11$$

即 $h=11$.

62.

证 (1)只须证得三向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积为零即可。

∵ $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=\begin{vmatrix}3&1&5\\1&2&2\\9&14&16\end{vmatrix}=96+72+70-90-84-64=0$

∴ 向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面。

(2)∵ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{3,\ 4,\ 5\}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{1,\ 2,\ 2\}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\{9,\ 14,\ 16\}$

而

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&14&16\end{vmatrix}=96+72+70-90-84-64=0$$

由此可知，向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$共面．但因向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$均以点A为始点，所以点A，B，C，D在同一平面上。

63.

证 (1)∵ $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\lambda\vec{a}-\mu\vec{b})$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\lambda\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b})(-\mu\vec{b})$$

$$=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a})-\mu(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b})$$

由于在混合积$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}$与$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b}$中有两个向量相同，因而

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b}=0$$

$$\therefore\quad(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\lambda\vec{a}-\mu\vec{b})=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

（2） $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})](\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}$$

$$=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$$

$$=2(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$$

$$\therefore\quad(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}).$$

（3） $(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})$

$$=[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})](\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=\{[\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})]\vec{c}-[\vec{c}(\vec{c}\times\vec{a})]\vec{b}\}(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=[(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})\vec{c}](\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b})$$

$$=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2$$

即

$$(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2$$

由此可知，当且仅当混合积

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$$

时，才有

$$(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})=0.$$

64.

证 ∵ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$

$\vec{a}\times\vec{d}=\vec{e}$

∴ $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}=\vec{c}\,\vec{d}$

$(\vec{a}\times\vec{d})\vec{b}=\vec{e}\,\vec{b}$

由混合积的运算性质得

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}=-(\vec{a}\times\vec{d})\vec{b}$$

从而有

$$\vec{c}\,\vec{d}=-\vec{e}\,\vec{b}=-\vec{b}\,\vec{e}$$

∴ $\vec{b}\,\vec{e}+\vec{c}\,\vec{d}=0.$

65.

解 (1)∵ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}$

而

$$\vec{a}\,\vec{c}=3\times(-1)+0\times3-1\times2=-5$$

$$\vec{b}\,\vec{c}=2\times(-1)+4\times3+3\times2=16$$

$$\begin{aligned}∴\ (\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}&=-5\{2,4,3\}-16\{3,0,-1\}\\&=\{-10,-20,-15\}\\&\quad-\{48,0,-16\}\\&=\{-58,-20,1\}\end{aligned}$$

即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\{-58,\ -20,\ 1\}.$$

(2) 利用拉格朗日恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\,\vec{b} & \vec{a}\,\vec{d}\\ \vec{b}\,\vec{c} & \vec{c}\,\vec{d}\end{vmatrix}$$

而

$$\vec{a}\,\vec{b} = 3\times 2 + 0\times 4 - 1\times 3 = 3$$

$$\vec{a}\,\vec{d} = 3\times 2 + 0\times 0 - 1\times 1 = 5$$

$$\vec{b}\,\vec{c} = 2\times(-1) + 4\times 3 + 3\times 2 = 16$$

$$\vec{c}\,\vec{d} = -1\times 2 + 3\times 0 + 2\times 1 = 0$$

则

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\,\vec{b} & \vec{a}\,\vec{d} \\ \vec{b}\,\vec{c} & \vec{c}\,\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} = -80$$

$\therefore\quad (\vec{a}\times\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d}) = -80$.

66.

证 （1）$\because\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$

$$= [\vec{a}(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b} - [\vec{b}(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a}$$

$$= (\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{a}$$

另一方面又有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$$

$$= [(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}]\vec{c} - [(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}]\vec{d}$$

$$= (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{d}$$

由上述二等式得

$$(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{a} - (\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{b} + (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{d} = \vec{0}$$

但

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$$

$$\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} = -\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d}$$

$$\therefore\quad (\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{a} + (\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d})\vec{b} + (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}$$

$$+ (\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b})\vec{d} = \vec{0}.$$

（2）由拉格朗日恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d}\\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d}\end{vmatrix}$$

$$=(\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d})-(\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{a}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\vec{b} & \vec{b}\vec{d}\\ \vec{a}\vec{c} & \vec{c}\vec{d}\end{vmatrix}$$

$$=(\vec{a}\vec{b})(\vec{c}\vec{d})-(\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d})$$

$$(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{b}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{b}\vec{c} & \vec{c}\vec{d}\\ \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{d}\end{vmatrix}$$

$$=(\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})-(\vec{a}\vec{b})(\vec{c}\vec{d})$$

将以上三个等式两端相加，得

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{a}\times\vec{d})$$

$$+(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{b}\times\vec{d})=0.$$

67.

证　将三个向量两两作数量积

$$\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\vec{a}\vec{b}=0$$

$$\vec{a}[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]=\vec{a}[(\vec{a}\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\vec{a})\vec{b}]$$

$$=(\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{a})-(\vec{a}\vec{a})(\vec{a}\vec{b})$$

$$=0$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})[\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})]$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})[(\vec{a}\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\vec{a})\vec{b}]$$

$$=(\vec{a}\vec{b})[(\vec{a}\times\vec{b})\vec{a}]-(\vec{a}\vec{a})[(\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}]$$

$$=(\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b}\vec{a})-(\vec{a}\vec{a})(\vec{a}\vec{b}\vec{b})$$

$$=0$$

由此可知，三向量$\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$两两垂直，所以正交。

68.

解

$$\vec{a}\times\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\}$$
$$=\vec{a}\times\{\vec{a}\times[(\vec{a}\,\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\,\vec{a})\vec{b}]\}$$
$$=\vec{a}\times[\vec{a}\times(-\vec{a}^2)\vec{b}]$$
$$=-\vec{a}^2[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]$$
$$=-\vec{a}^2[(\vec{a}\,\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\,\vec{a})\vec{b}]$$
$$=-\vec{a}^2(-\vec{a}^2)\vec{b}$$
$$=\vec{a}^4\vec{b}$$

即

$$\vec{a}\times\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\}=\vec{a}^4\vec{b}.$$

69.

解 ∵ $\vec{b}\times\vec{x}=\vec{c}$

∴ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{x})=\vec{a}\times\vec{c}$　　(1)

但　$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{x})=(\vec{a}\,\vec{x})\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b})\vec{x}$　　(2)

由（1）、（2）式得

$$(\vec{a}\,\vec{b})\vec{x}=(\vec{a}\,\vec{x})\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}\quad(3)$$

当向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不垂直时，由（3）式解得

$$\vec{x}=\frac{\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}}{\vec{a}\,\vec{b}}$$

若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$互相垂直，则此题无解。

70.

解法一　设点P在直线上的垂足为D（图28），则

$$d=|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{|\overrightarrow{MP}|^2-|\overrightarrow{MD}|^2}$$

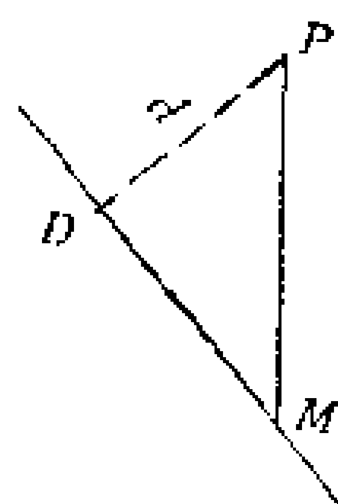


图 28

$\because\quad \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\{4,1,-10\}$

$\therefore\quad |\overrightarrow{MP}|=\sqrt{4^2+1^2+(-10)^2}$

$=\sqrt{117}$

又 $\because\quad |\overrightarrow{MD}|=|\text{射}_{\vec a}\overrightarrow{MP}|=|\vec a^\circ\cdot\overrightarrow{MP}|$

而 $\quad |\vec a|=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$

$\therefore\quad \vec a^\circ=\frac{1}{\sqrt{17}}\{3,2,-2\}=\left\{\frac{3}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{2}{\sqrt{17}}\right\}$

$\therefore\quad |\vec a^\circ\cdot\overrightarrow{MP}|=\left|\frac{3}{\sqrt{17}}\times4+\frac{2}{\sqrt{17}}\times1-\frac{2}{\sqrt{17}}\times(-10)\right|$

$=2\sqrt{17}$

则

$$d=\sqrt{(\sqrt{117})^2-(2\sqrt{17})^2}=\sqrt{49}=7$$

即点 P 到直线的距离 $d=7$。

解法二 $\because\quad \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\{4,\ 1,\ -10\}$

而 $\quad |\vec a\times\overrightarrow{MP}|=\sqrt{\begin{vmatrix}2&-2\\1&-10\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-2&3\\-10&4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3&2\\4&1\end{vmatrix}^2}$

$=\sqrt{833}$

$|\vec a|=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$

由二向量的向量积的几何意义知

$$d=\frac{|\vec a\times\overrightarrow{MP}|}{|\vec a|}$$

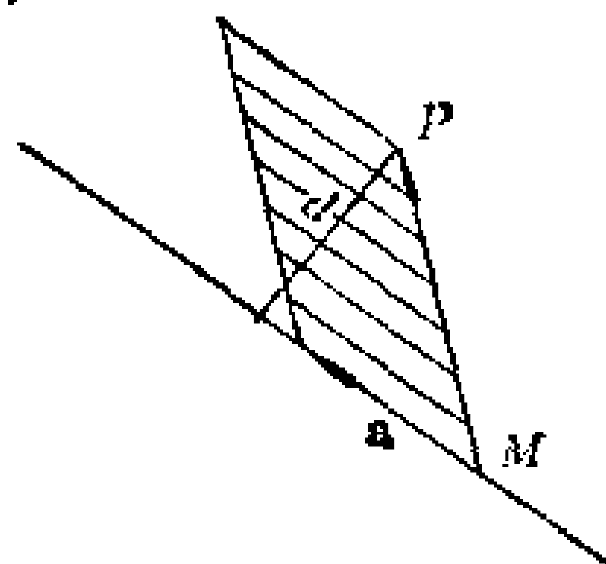


图 29

即

$$d=\frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}}=\sqrt{49}=7$$

所以点 P 到直线的距离 $d=7$。

第三章　平面和直线习题解答

1.

解　将点A的坐标代入方程，得

$$3\times4-5\times1+2\times2-17=-6\neq0$$

因点A的坐标不满足方程，所以点A不在平面上。

代入点B的坐标，得

$$3\times2-5\times(-1)+2\times3-17=0$$

即点B的坐标满足方程，所以点B在平面上。

同理，可验证点C与点E不在平面上，点D在平面上。

2.

解　因为方程（1）不含有 z 项和常数项，所以方程（1）表示通过 Oz 轴的平面。

方程（2）不含有 y 项，因而方程（2）表示平行于Oy轴的平面。

方程（3）不含有 y 项和 z 项，所以方程（3）表示平行于 Oyz 坐标平面的平面.

方程（4）不含有常数项，所以方程（4）表示通过坐标原点的平面。

3.

解　由平面方程的性质知，三个变量的系数就是法向量的坐标，所以方程（1）的法向量为

$$\vec{n}_1=\{1,-2,1\}$$

方程（2）的法向量为

$$\vec{n}_2=\{3,8,0\}$$

方程（3）的法向量为

$$\vec{n}_3 = \{5, -1, -1\}$$

方程（4）的法向量为

$$\vec{n}_4 = \{1, 0, 0\}.$$

4.

解 因为所求平面与已知平面平行，所以它们的法向量相同，即

$$\vec{n} = \{2, -8, 1\}$$

则所求平面方程为

$$2(x-3)-8(y-0)+(z+5)=0$$

即

$$2x-8y-z-1=0.$$

5.

解 若所求平面通过 Ox 轴，则其方程为

$$By+Cz=0$$

由垂直条件得

$$B-2C=0$$

或 $\quad B=2C$

代入所设方程中并消去 C，得

$$2y+z=0.$$

6.

解 因为所求平面通过点 A, B，又平行于向量 $\vec{a}$，则平面的法向量 $\vec{n}$ 必同时垂直于向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{a}$（图30），而

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{-6, 0, 8\}$$

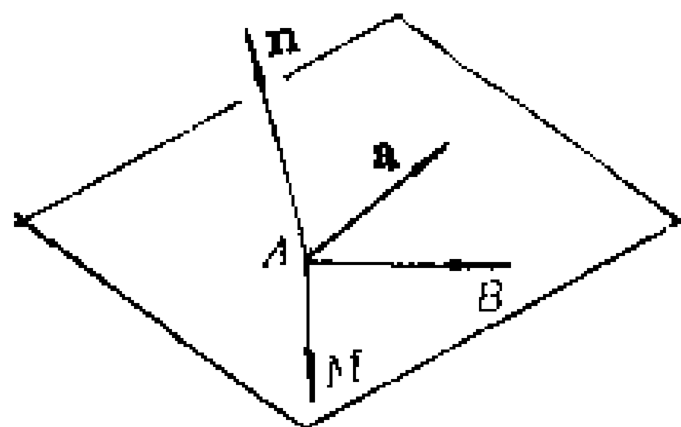


图 30

于是

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{a}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{-8, 12, -6\}$$

则所求平面方程为

$$-8(x-1)+12(y-2)-6(z+1)=0$$

整理得

$$4x-6y+3z+11=0.$$

7.

解 设点 $M(x,y,z)$为所求平面上任一点，则由共面条件得

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2-2 & 1+1 & 3-1 \\ 1-2 & 1+1 & -1-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

展开后整理得

$$4x+y-z-6=0.$$

8.

解 依题意，设所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

代入点 P 的坐标，得

$$\frac{2}{a}+\frac{-1}{a}+\frac{3}{a}=1$$

解得

$$a=4$$

代入原方程中，得

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1.$$

9.

证 由平面截距式方程知，三角形的顶点坐标为 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{-a,b,0\}$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{-a,0,c\}$$

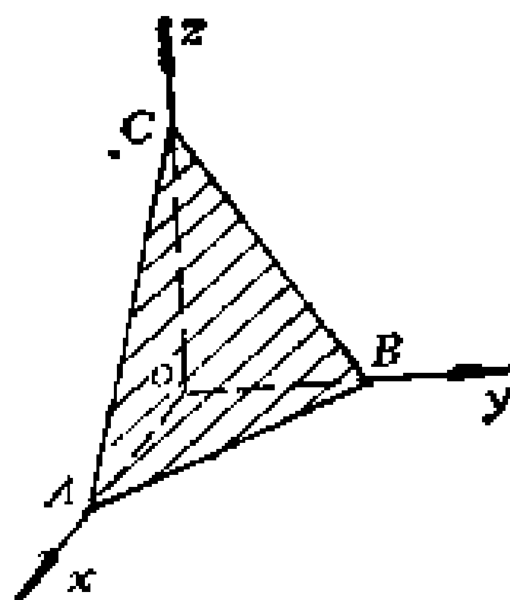


图 31

而

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix} b & 0\\ 0 & c\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & -a\\ c & -a\end{vmatrix},\begin{vmatrix} -a & b\\ -a & 0\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{bc, ca, ab\}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

由于

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

10.

解　由截距式方程知，所求平面方程可设为

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{2}{3}}+\frac{z}{c}=1$$

其中 c 是平面在 Oz 轴上的截距，利用两平面的垂直条件得

$$-\frac{1}{2}\times 2+\frac{3}{2}\times(-2)+\frac{1}{c}\times 4=0$$

从而得

$$c=1$$

代入所设方程中，得

$$\frac{x}{-2}+\frac{3}{2}y+z=1$$

或

$$x-3y-2z+2=0.$$

11.

解　因所求平面与已知平面平行，所以其平面方程可设为

$$2x+3y+2z+D=0$$

将此方程化为截距式

$$\frac{x}{-\frac{D}{2}}+\frac{y}{-\frac{D}{3}}+\frac{z}{-\frac{D}{2}}=1$$

由于

$$-\frac{D}{2}-\frac{D}{3}-\frac{D}{2}=4$$

则

$$D=-3$$

代入所设方程中，得

$$2x+3y+2z-3=0.$$

12.

解　由二平面的平行条件，设所求平面方程为

$$2x+y+2z-D=0$$

化为截距式方程

$$\frac{x}{-\frac{D}{2}}+\frac{y}{-D}+\frac{z}{-\frac{D}{2}}=1$$

由于平面的三个截距就是构成四面体的三个棱，则由体积计算公式，得

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-\frac{D}{2} & 0 & 0\\ 0 & -D & 0\\ 0 & 0 & -\frac{D}{2}\end{vmatrix}=1$$

即

$$\pm\frac{1}{6}\times\left(-\frac{D^3}{4}\right)=1$$

解得

$$D=\pm\sqrt[3]{24}=\pm2\sqrt[3]{3}$$

则所求平面方程为

$$2x+y+2z\pm2\sqrt[3]{3}=0.$$

13.

解　法线式方程的特点是：1）法向量的模长等于1；2）常数项小于或等于零。

（1）式中法向量的模不等于1，所以不是法线式方程。

（2）式中法向量的模等于1，且常数项小于零，因而是法线式方程。

同理，（3）、（6）式不是法线式方程，而（4）、（5）式是法线式方程。其中（4）式为法线式方程的特殊形式，常数项等于零。

14.

解 因为点P是原点O在平面π上的垂足，所以向量$\overrightarrow{OP}$垂直于平面π，而平面π又通过点P，则平面π的方程为

$$3(x-3)+4(y-4)-5(z+5)=0$$

即

$$3x+4y-5z-50=0。$$

15.

证 设平面在两个不同坐标系中的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

和

$$\frac{x'}{a'}+\frac{y'}{b'}+\frac{z'}{c'}=1$$

将以上二方程分别化为法线式

$$\frac{x}{a\mu}+\frac{y}{b\mu}+\frac{z}{c\mu}-\frac{1}{\mu}=0$$

和

$$\frac{x'}{a'\mu'}+\frac{y'}{b'\mu'}+\frac{z'}{c'\mu'}-\frac{1}{\mu'}=0$$

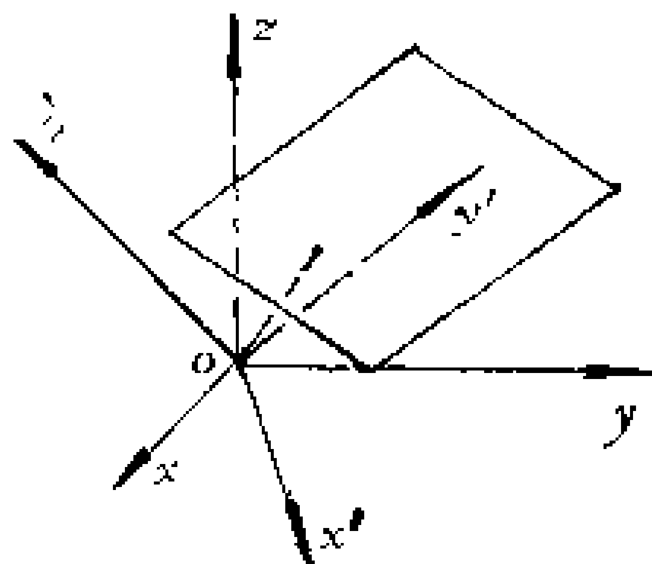


图 32

其中

$$\mu=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

$$\mu'=\sqrt{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}}$$

因为在有公共坐标原点的两个不同坐标系中，坐标原点到平面的距离相等（图32），即

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu'}$$

则

$$\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{\mu'^2}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}.$$

16.

解　（1）$\because\ \mu=-\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=-3$

$$\therefore\ \delta=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1$$

$$=-\frac{2}{3}\times(-2)+\frac{1}{3}\times(-4)-\frac{2}{3}\times 3-1$$

$$=-3$$

而

$$d=|\delta|$$

$$\therefore\ \delta=-3,\ d=3.$$

（2）$\because\ \mu=\sqrt{16^2+(-12)^2+15^2}=25$

$$\therefore\ \delta=\frac{16}{25}x-\frac{12}{25}y+\frac{15}{25}z-\frac{4}{25}$$

$$=\frac{16}{25}\times 2-\frac{12}{25}\times(-1)+\frac{15}{25}\times(-1)-\frac{4}{25}$$

$$=1$$

而　$d=|\delta|$

$$\therefore\ \delta=d=1.$$

（3）$\because\ \mu=-\sqrt{5^2+(-3)^2+1^2}=-\sqrt{35}$

$$\therefore\ \delta=-\frac{5}{\sqrt{35}}x+\frac{3}{\sqrt{35}}y-\frac{1}{\sqrt{35}}z-\frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$= -\frac{5}{\sqrt{35}}\times 1 + \frac{3}{\sqrt{35}}\times 2 - \frac{1}{\sqrt{35}}\times(-3) - \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$= 0$$

而

$$d = |\delta|$$

$\therefore\quad \delta = d = 0$（点$M$在平面 π 上）。

（4） $\because\quad \mu = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$

$$\therefore\quad \delta = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 1$$

$$= \frac{4}{5}\times 0 - \frac{3}{5}\times 0 - 1$$

$$= -1$$

而

$$d = |\delta|$$

$\therefore\quad \delta = -1,\ d = 1.$

17.

解 设点P的坐标为$(0,0,z)$，则

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-0)^2 + (0-z)^2} = \sqrt{z^2+5}$$

将已知平面方程化为法线式方程

$$\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{9}{7} = 0$$

则点P到平面的距离为

$$d = \left|\frac{3}{7}\times 0 - \frac{2}{7}\times 0 + \frac{6}{7}\times z - \frac{9}{7}\right|$$

即

$$d = \left|\frac{6}{7}z - \frac{9}{7}\right|$$

依题意，得

$$\left|\frac{6}{7}z - \frac{9}{7}\right| = \sqrt{z^2+5}$$

整理得

$$13z^2+108z+164=0$$

由此解得

$$z=-2 \text{ 或 } z=-\frac{82}{13}$$

则所求点为$(0,0,-2)$和$\left(0,0,-\frac{82}{13}\right)$。

18.

解 将二平行平面方程化为法线式

$$\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{8}{7}=0$$

与

$$-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{4}{7}=0$$

由于二法线向量方向相反，则

$$p=\frac{1}{2}(p_1-p_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{7}-\frac{4}{7}\right)=\frac{2}{7}$$

从而所求平面方程为

$$\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{2}{7}=0$$

或

$$2x-3y+6z-2=0.$$

19.

解 将二平面方程化为法线式

$$\frac{x}{\sqrt{14}}-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{2}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0 \qquad (1)$$

与

$$-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{3}{\sqrt{14}}=0 \qquad (2)$$

将（1）、（2）式相加，得

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x-\frac{1}{\sqrt{14}}y+\frac{3}{\sqrt{14}}z-\frac{8}{\sqrt{14}}=0$$

将（1）、（2）式相减，得

$$\frac{4}{\sqrt{14}}x-\frac{5}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{2}{\sqrt{14}}=0$$

即

$$2x+y-3z+8=0$$

与

$$4x-5y+z-2=0$$

是所求的两个角平分面方程。

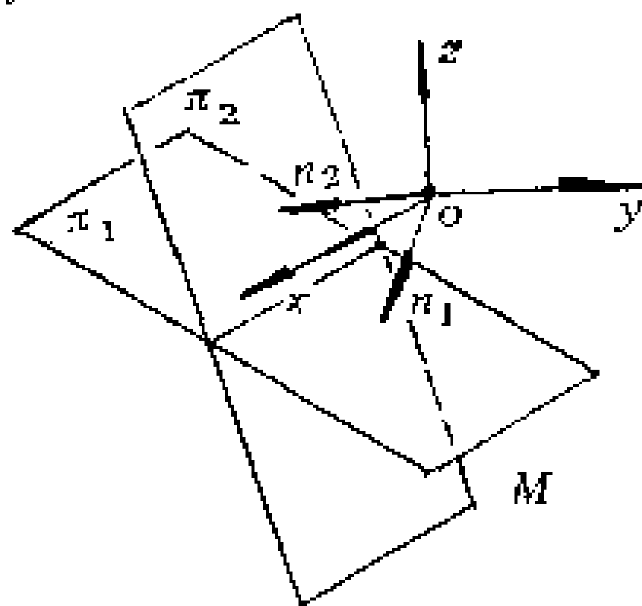


图 33

20.

解 把二平面方程化为法线式

$$\pi_1:\quad -\frac{5}{\sqrt{27}}x+\frac{1}{\sqrt{27}}y-\frac{1}{\sqrt{27}}z-\frac{3}{\sqrt{27}}=0$$

与

$$\pi_2:\quad -\frac{4}{\sqrt{29}}x+\frac{3}{\sqrt{29}}y-\frac{2}{\sqrt{29}}z-\frac{5}{\sqrt{29}}=0$$

则它们的法线向量为

$$\vec{n}_1=\left\{-\frac{5}{\sqrt{27}},\frac{1}{\sqrt{27}},-\frac{1}{\sqrt{27}}\right\}$$

$$\vec{n}_2=\left\{-\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},-\frac{2}{\sqrt{29}}\right\}$$

$$\because\quad \vec{n}_1\vec{n}_2=\frac{1}{\sqrt{27\times29}}[-5\times(-4)+1\times3-1\times(-2)]$$

$$=\frac{25}{\sqrt{783}}>0$$

$$\therefore\quad \cos\varphi>0$$

即二平面的法线向量构成锐角。从而坐标原点在二平面所构成的钝角内（图33）。

将点M的坐标代入 π_1 中，得

$$=\frac{5}{\sqrt{27}}\times(-3)+\frac{1}{\sqrt{27}}\times(-2)-\frac{1}{\sqrt{27}}\times 1-\frac{3}{\sqrt{27}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{27}}>0$$

将点M的坐标代入 π_2 中，得

$$-\frac{4}{\sqrt{29}}\times(-3)+\frac{3}{\sqrt{29}}\times(-2)-\frac{2}{\sqrt{29}}\times 1-\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{29}}<0$$

由此可知，点M与坐标原点在平面 π_1 的两侧，面在平面π_2的同侧，所以点M在二平面构成的锐角内。

21.

解 将 π_1,π_2 化为法线式

$$\pi_1:\quad \frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{6}{7}=0$$

与

$$\pi_2:\quad -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-3=0$$

因为与二平面 π_1,π_2 等距的点在二平面的角平分面上，而

$$\pi_1-\pi_2=\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\right)x+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)y+\left(\frac{6}{7}+\frac{2}{3}\right)z-\left(\frac{6}{7}-3\right)=0$$

即

$$\pi_1-\pi_2=\frac{1}{21}(13x-5y+32z+45)=0$$

因为点P在 Oy 轴上，则令

$$x=z=0$$

得

$$y=\frac{45}{5}=9$$

同理

$$\pi_1+\pi_2=\frac{1}{21}(-x+23y+4z-81)=0$$

令

$$x=z=0$$

得 $$y=\frac{81}{23}$$

则所求点为 $P_1(0,9,0)$和 $P_2\left(0,\frac{81}{23},0\right)$。

22.

解 设所求平面方程为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-6=0 \quad (1)$$

化为截距式

$$\frac{x}{\frac{6}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{6}{\cos\beta}}+\frac{z}{\frac{6}{\cos\gamma}}=1$$

依题意，得

$$\frac{6}{\cos\alpha}=\frac{6}{3\cos\beta}=\frac{6}{2\cos\gamma}$$

即

$$\cos\alpha=3\cos\beta=2\cos\gamma \quad (2)$$

由方向余弦的性质及（2）式，解得

$$\cos\alpha=\pm\frac{6}{7},\ \cos\beta=\pm\frac{2}{7},\ \cos\gamma=\pm\frac{3}{7}$$

代入（1）式中，并整理得

$$6x+2y+3z\pm42=0.$$

23.

解 因所求平面通过 Ox 轴，则其方程为

$$By+Cz=0$$

利用点到平面的距离公式，得

$$\frac{|4B+3C|}{\sqrt{B^2+C^2}}=4$$

即

$$24BC-7C^2=0$$

解得

$$C=0 \text{ 或 } 7C=24B$$

则所求平面方程为

$$y=0 \text{ 或 } 7y+24z=0。$$

24.

解　因为所求平面与已知平面平行，故可设为

$$6x+3y+2z+D=0$$

由点到平面的距离公式，得

$$d=\frac{|6\times 0+3\times 0+2\times 0+D|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=1$$

即

$$\frac{|D|}{7}=1$$

解得

$$D=\pm 7$$

则所求平面方程为

$$6x+3y+2z\pm 7=0。$$

25.

解　设点M关于平面的对称点为 $M'(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=\{x_0-1,\ y_0-1,\ z_0-1\}$$

由对称点的性质知，$\overrightarrow{MM'}$垂直于已知平面，且点M到平面的距离等于点 M'到平面的距离。从而向量$\overrightarrow{MM'}$与平面的法向量$\vec{n}$共线，即

$$\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0-1}{2}=\frac{z_0-1}{-1}=t$$

其中 t 为对应坐标的比例系数，且 $t\neq 0$，则

$$x_0=t+1,\ y_0=2t+1,\ z_0=-t+1 \qquad (*)$$

由点到平面的距离公式得

$$\frac{|1\times 1+2\times 1-1\times 1-8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|1\times(t+1)+2\times(2t+1)-1\times(-t+1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

即

$$\sqrt{6}=\sqrt{6}\,|t-1|$$

解得　　$t=2$ 或 $t=0$

当 $t=0$ 时，不符题意，故舍去。将 $t=2$ 代入（*）式中，得

$$x_0=3,\ y_0=5,\ z_0=-1$$

即点M关于已知平面的对称点为 $M'(3,5,-1)$。

26.

解　（1）因二平面平行，则其法向量共线，即

$$\frac{2}{m}=\frac{l}{-6}=\frac{3}{-6}$$

由此解得

$$l=3,\ m=-4.$$

（2）因二平面垂直，则其法向量也垂直，即

$$7\times l-2\times 1-1\times(-3)=0$$

解得

$$l=-\frac{1}{7}.$$

（3）由两个平面的夹角公式，得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1\times 1-3\times 3+5\times(-n)}{\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}\sqrt{1^2+3^2+(-n)^2}}$$

即

$$\frac{1}{2}=\frac{-5-5n}{\sqrt{50}\sqrt{n^2+10}}$$

整理后得

$$n^2+4n-8=0$$

解得

$$n=-2\pm 2\sqrt{3}.$$

27.

解 设所求平面方程为

$$y + kz = 0$$

由二平面的夹角公式得

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{k}{\sqrt{0^2 + 1^2 + k^2}}$$

即

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

解得

$$k = \pm\sqrt{3}$$

则所求平面方程为

$$y \pm \sqrt{3}z = 0。$$

28.

解 因为平面通过坐标原点，所以方程可设为

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (1)$$

由垂直条件得

$$A + 2B + 3C = 0 \qquad (2)$$

$$3A + B - C = 0 \qquad (3)$$

由（2）、（3）式解得

$$A:B:C = 1:-2:1$$

代入（1）式中，得

$$x - 2y + z = 0。$$

29.

解 设所求平面方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

代入已知点 A, B 的坐标，得

$$-B + D = 0 \qquad (1)$$

$$C + D = 0 \qquad (2)$$

由二平面的夹角公式得

$$\cos\frac{2}{3}\pi = \frac{B - C}{\sqrt{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

即

$$A^2-B^2-C^2+4BC=0 \qquad (3)$$

由（1）、（2）、（3）式解得

$$A=\pm\sqrt{6}D,\quad B=D,\ C=-D$$

代入所设方程中并消去 D，则得方程

$$\pm\sqrt{6}x+y-z+1=0。$$

30.

解 （1）因为系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 8 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=104\neq 0$$

所以三平面有唯一交点，而

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 8 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 9 & -3 & 2\end{vmatrix}=312,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 7 & -1\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 9 & 2\end{vmatrix}=-104,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}5 & 8 & 7\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 9\end{vmatrix}=0$$

则

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{312}{104}=3$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-104}{104}=-1$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{104}=0$$

从面三平面的交点为 $(3,-1,0)$。

（2）因为系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -4 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & -12 & -6\end{vmatrix}=0$$

而增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

的秩为3，所以三个平面没有交点。

（3）因为系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -13 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

而增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -13 & -23 \\ 3 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

的秩为2，所以三平面交于一条直线，即交点不定。

31.

解 只须验证其中某三个平面的交点在第四个平面上即可。

由平面 π_1, π_2, π_3 求得交点坐标为 $M(1, 3, -1)$，将点M的坐标代入平面方程 π_4 中，得

$$6 \times 1 + 3 \times 3 - 8 \times (-1) - 23 = 0$$

即前三个平面的交点在第四个平面上，所以四平面共点。

32.

证 因为三个平面的法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 共面 $\Longleftrightarrow$ 混合积 $\vec{n}_1\vec{n}_2\vec{n}_3 = 0$，而混合积 $\vec{n}_1\vec{n}_2\vec{n}_3 = 0$ 的必要充分条件是以 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 为法向量的三个平面方程所确定的方程组或者没有解，或者有无穷多组解，从而三平面或者没有交点，或者有无穷多交点。

33.

解法一 由三个已知平面方程

$$\left.\begin{aligned}x-2y-8z+9&=0\\x-4z-13&=0\\2x+y+5z+1&=0\end{aligned}\right\}$$

求得交点坐标为$(5,-1,-2)$,则所求平面方程为

$$1(x-5)+3(y+1)+1(z+2)=0.$$

即

$$x+3y+z=0.$$

解法二 设所求平面方程为

$$\lambda(x-2y+8z+9)+\mu(x-4z-13)+\nu(2x+y+5z+1)=0$$

即

$$(\lambda+\mu+2\nu)x+(-2\lambda+\nu)y+(8\lambda-4\mu+5\nu)z$$
$$+(9\lambda-13\mu+\nu)=0 \qquad (*)$$

因为向量$\overrightarrow{a}$垂直于所求平面，所以

$$\left.\begin{aligned}\lambda+\mu+2\nu&=1\\-2\lambda+\nu&=3\\8\lambda-4\mu+5\nu&=1\end{aligned}\right\}$$

由上述方程组解得

$$\lambda=-\frac{17}{19},\quad \mu=-\frac{10}{19},\quad \nu=\frac{23}{19}$$

代入(*)式中得

$$x+3y+z=0.$$

34.

解 因为所求平面在二已知平面确定的面束中，故可设为

$$x+6y-3z+3+\lambda(2x+7y-z+8)=0$$

代入已知点的坐标

$$2+6\times(-5)-3\times1+3+\lambda(2\times2+7\times(-5)-1\times1+8)=0$$

则得 $\lambda=-\dfrac{7}{6}$

代入所设方程中并整理得

$$8x+13y+11z+38=0.$$

35.

证 ∵ $\pi_3-\pi_2=3x+y+z+3-(x+2y+z+2)$

$$=2x-y+1$$

$$=\pi_1$$

∴ π_1、π_2、π_3 属于同一面束

设过点 P 的平面方程为

$$2x-y+1+\lambda(x+2y+z+2)=0 \qquad (*)$$

代入点 P 的坐标

$$2\times1-1\times0+1+\lambda(1+2\times0+1+2)=0$$

则得

$$\lambda=-\frac{3}{4}$$

代入(*)式中，则得到过点 P 的平面方程

$$5x-10y-3z-2=0.$$

36.

解 将平面束方程化为截距式

$$\frac{x}{\frac{5-4k}{1+k}}+\frac{y}{\frac{5-4k}{3-k}}+\frac{z}{\frac{5-4k}{-2k}}=1$$

依题意

$$\frac{5-4k}{1+k}=\frac{5-4k}{3-k}$$

由此解得

$$k=1 \text{ 或 } k=\frac{5}{4}$$

代入面束方程中，得

$$2x+2y-2z-1=0$$

和

$$9x+7y-10z=0.$$

37.

解 若平面束中含有坐标平面，由于坐标平面经过原点，

则常数项必为零. 为此，令

$$6+9k=0$$

则

$$k=-\frac{2}{3}$$

代入平面束方程中并整理得

$$y=0$$

即属于平面束的坐标平面是 Oxz 坐标面。

38.

解　将面束方程化为

$$(1+k)x+(1-2k)y+(-1+k)z+1=0 \quad (*)$$

若方程(*)确定的平面垂直于 Oxy 坐标面，则

$$-1+k=0 \text{ 或 } k=1$$

将 k 值代入(*)式，得

$$2x-y+1=0.$$

若方程确(*)定的平面垂直于 Oxz 坐标面，则

$$1-2k=0 \text{ 或 } k=\frac{1}{2}$$

将 k 值代入(*)式，得

$$3x-z+2=0.$$

若方(*)程确定的平面垂直于 Oyz 坐标面，则

$$1+k=0 \text{ 或 } k=-1$$

将 k 值代入(*)式，得

$$3y-2z+1=0$$

因此，所求平面方程为 $2x-y+1=0$， $3x-z+2=0$ 和 $3y-2z+1=0$.

39.

解　将已知点的坐标代入面把方程中，得

$$\left.\begin{aligned}1+\lambda+3\mu&=0\\ -\lambda-\mu&=0\end{aligned}\right\}$$

解此方程组，得

$$\lambda=\frac{1}{2},\quad \mu=-\frac{1}{2}$$

代入面把方程中并整理得

$$x+3y-2z+5=0.$$

40.

解 将面把方程化为

$$(1+\lambda+5\mu)x+(-1+\lambda+\mu)y+(1-\lambda+\mu)z$$
$$+(-1-2\lambda-7\mu)=0 \tag{1}$$

若方程（1）确定的平面平行于 Oxy 坐标面，则

$$\left.\begin{array}{l}1+\lambda+5\mu=0\\-1+\lambda+\mu=0\end{array}\right\}$$

解得

$$\lambda=\frac{3}{2},\quad \mu=-\frac{1}{2}$$

代入（1）式中整理得

$$2z+1=0. \tag{2}$$

若方程（1）确定的平面平行于 Oxz 坐标面，则

$$\left.\begin{array}{l}1+\lambda+5\mu=0\\1-\lambda+\mu\ \ =0\end{array}\right\}$$

解得 $\lambda=\frac{2}{3},\quad \mu=-\frac{1}{3}$

代入（1）式中整理得

$$y=0. \tag{3}$$

若方程（1）确定的平面平行于 Oyz 坐标面，则

$$\left.\begin{array}{l}-1+\lambda-\mu=0\\1-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}$$

解得

$$\lambda=1,\ \mu=0$$

代入（1）式中整理得

$$2x-3=0. \tag{4}$$

由于所求的平面都经过面把的中心，则由（2）、（3）、（4）式得

$$x=\frac{3}{2},\quad y=0,\quad z=-\frac{1}{2}$$

即所求平面为：$2x-3=0$，$y=0$，$2z+1=0$，面把中心为$\left(\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$。

41.

解　因为所求直线与向量$\vec{a}$平行，故$\vec{a}$可作为直线的方向向量，从而所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+3}{4}.$$

42.

解　设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$是直线上的点，则

$$|x_0|=|y_0|=|z_0|$$

令 $x_0=1$，则有

$$y_0=\pm 1,\quad z_0=\pm 1$$

由于点 M_0 在直线上，从而向量$\overrightarrow{OM_0}=\{1,\pm 1,\pm 1\}$可作为直线的方向向量，则所求直线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};\qquad \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1};$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1};\qquad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

即到三个坐标面距离相等的直线共有四条。

43.

解　因为所求直线平行于已知直线，则它们的方向向量相同，而已知直线的方向向量为

$$\vec{a}=\{2,0,-3\}$$

则所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{-3}$$

或

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z+1}{-3},\ y-2=0.$$

44.

解　因为所求直线平行于二已知平面，则直线的方向向量同时垂直于二已知平面的法向量，而

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right\}=\{1,4,1\}$$

则所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-0}{1}.$$

45.

解　因为点在平面上的投影就是过点引平面的垂线与平面的交点（图34），面过点M的垂线方程为

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$$

或

$$x=t+3,\ y=2t+1,\ z=3t-1$$

将上式代入平面方程中

$$t+3+2(2t+1)+3(3t-1)-30=0$$

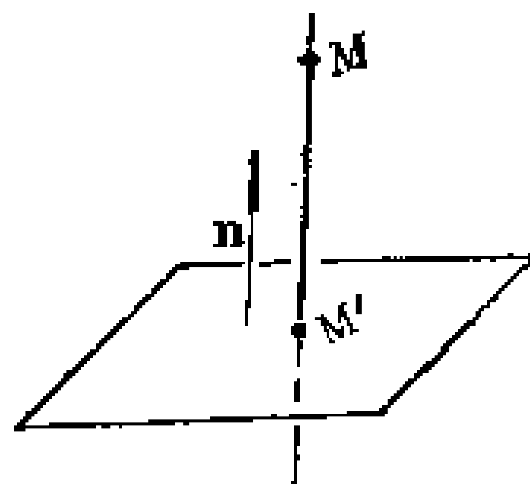


图 34

则得

$$t=2$$

代入直线的参数方程中，得

$$x=5,\ y=5,\ z=5$$

即点M在平面上的投影为 $M'(5,5,5)$.

46.

解　因为所求直线在已知平面上，又和 Ox 轴、Oy 轴相交，则直线必通过平面与 Ox 轴、Oy 轴的交点. 为此，在已知平面方程中分别令

$$y=z=0\ \text{和}\ x=z=0$$

就得到平面与两个轴的交点（4，0，0）和（0，2，0）.由此得两点式直线方程为

$$\frac{x-4}{-4}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{0}$$

或

$$x-4=-2y,\quad z=0。$$

47.

解　因为向量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{-1,2,-1\}$$

所以过点 A,B 的直线参数方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=2-t\\y&=1+2t\\z&=1-t\end{aligned}\right\}。$$

48.

解　将点M的坐标代入直线方程中

$$2=2t,\quad 1=1,\quad c=2t-1$$

由第一式得

$$t=1$$

代入第三式中，得

$$c=1。$$

49.

解　因为所求直线与二已知直线垂直，所以其方向向量 $\vec{a}$ 同时垂直于二已知直线的方向向量 $\vec{a}_1$和 $\vec{a}_2$，而

$$\vec{a}_1=\{1,2,5\},\qquad \vec{a}_2=\{3,1,0\}$$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\left\{\begin{vmatrix}2&5\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5&1\\0&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}\right\}=\{-5,15,-5\}$$

取

$$\vec{a}=\frac{1}{5}\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,3,-1\}$$

则所求直线的参数方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=1-t\\y&=2+3t\\z&=-1-t\end{aligned}\right\}。$$

50.

解　（1）直线（1）的方向向量为

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{5,7,11\}$$

在直线（1）中任取一点 $M(2,0,1)$，则直线（1）的标准方程为

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{11}.$$

（2）由第一个方程得

$$\frac{x+5}{3}=y$$

由第二个方程得

$$\frac{y}{2}=z-4$$

由此得直线（2）的标准方程为

$$\frac{x+5}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1}.$$

（3）由第二个方程得

$$x+4=\frac{z}{3}$$

则直线（3）的标准方程为

$$\frac{x+4}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z}{3}.$$

（4）由第一个方程得

$$\frac{x}{-2}=y$$

由第二个方程得

$$\frac{y}{3}=z-1$$

则直线（4）的标准方程为

$$\frac{x}{-6}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}.$$

51.

解　若直线与某坐标轴相交，则交点坐标满足直线方程，且另两个坐标均为零．因此，对已知直线方程，若令

$$y = z = 0$$

则有

$$\left.\begin{array}{r} 2x + D = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

解得

$$D = -4.$$

若令

$$x = z = 0$$

则有

$$\left.\begin{array}{r} 3y + D = 0 \\ -2y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

解得

$$D = 9.$$

若令

$$x = y = 0$$

则有

$$\left.\begin{array}{r} -z + D = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

解得

$$D = 3.$$

即当直线与 Ox 轴、Oy 轴及 Oz 轴相交时，D 值分别为 -4，9 和 3。

52.

解　因为直线在坐标面上的射影就是直线的投射平面与坐标面的交线，若求投射平面方程，可将直线方程改写为平面束方程

$$3x + 2y - 4z - 5 + \lambda(6x - y - 2z + 4) = 0$$

或

$$(3+6\lambda)x+(2-\lambda)y+(-4-2\lambda)z+(-5+4\lambda)=0 \quad (1)$$

若（1）式确定的平面垂直于 Oxy 坐标面，则

$$-4-2\lambda=0 \text{ 或 } \lambda=-2$$

代入（1）式中，得直线关于 Oxy 坐标面的投射平面方程为

$$-9x+4y-13=0$$

从而直线在 Oxy 坐标面上射影的方程为

$$\begin{cases} -9x-4y-13=0 \\ z=0. \end{cases}$$

若方程（1）确定的平面垂直于 Oxz 坐标面，则

$$2-\lambda=0 \text{ 或 } \lambda=2$$

代入（1）式中，得直线关于 Oxz 坐标面的投射平面为

$$15x-8z+3=0$$

从面直线在 Oxz 坐标面上射影的方程为

$$\begin{cases} 15x-8z+3=0 \\ y=0. \end{cases}$$

若（1）式确定的平面垂直于 Oyz 坐标面，则

$$3+6\lambda=0 \quad \text{或} \quad \lambda=-\frac{1}{2}$$

代入（1）式中，则得直线关于 Oyz 坐标面的投射平面为

$$5y-6z-14=0$$

从面直线在 Oyz 坐标面上射影的方程为

$$\begin{cases} 5y-6z-14=0 \\ x=0. \end{cases}$$

53.

解 依题意知，所求平面平行于直线的方向向量 $\vec{a}=\{1,2,2\}$，且通过直线上的点 $M_0(2,3,-1)$ 及已知点 $M(1,1,2)$，面

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=\{-1,-2,3\}$$

$$\vec{a}\times\overrightarrow{M_0M}=\left\{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{10,-5,0\}$$

则可取平面法向量

$$\vec{n}=\frac{1}{5}\vec{a}\times\overrightarrow{M_0M}=\{2,-1,0\}$$

从而所求平面方程为

$$2(x-1)-(y-1)+0(z-2)=0$$

即

$$2x-y-1=0.$$

54.

解 依题意知，二已知直线的方向向量与平面的法向量垂直，而

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\left\{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{4,8,10\}$$

则可取平面的法向量

$$\vec{n}=\frac{1}{2}\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{2,4,5\}$$

从而所求平面方程为

$$2(x+1)+4(y+2)+5(z-3)=0$$

即 $\quad 2x+4y+5z-5=0.$

55.

解 因为过已知直线的平面束方程为

$$2x+5y-5+\lambda(2y+z+1)=0$$

即

$$2x+(5+2\lambda)y+\lambda z+(-5+\lambda)=0$$

由垂直条件

$$1\times 2+4\times(5+2\lambda)+3\times\lambda=0$$

解得

$$\lambda=-2$$

代入平面束方程中，得

$$2x+y-2z-7=0.$$

56.

解　先将直线方程化为参数式

$$\left.\begin{aligned}x&=t\\y&=2t-3\\z&=t-3\end{aligned}\right\}$$

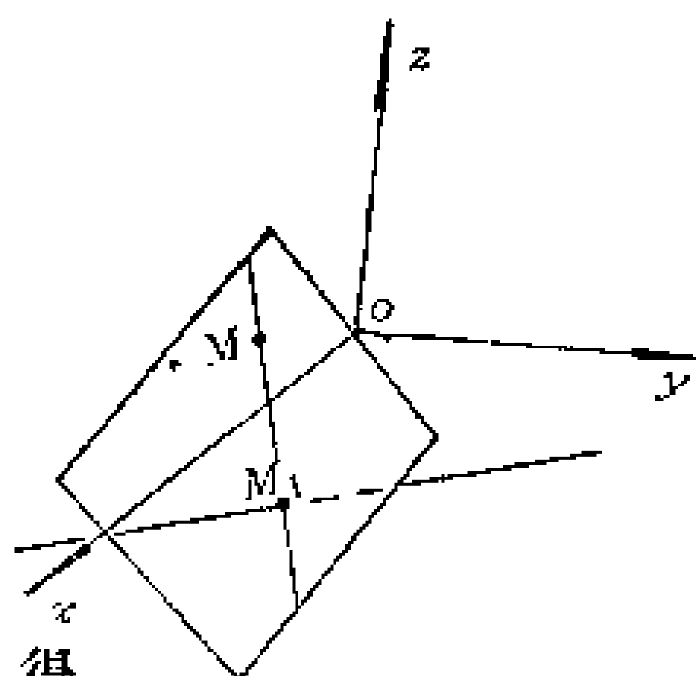


图 35

再过点M作直线的垂面方程（图35）

$$x+2y+z+1=0$$

将直线的参数方程代入垂面方程中，得

$$t+2(2t-3)+(t-3)+1=0$$

由此解得

$$t=\frac{4}{3}$$

代入参数方程中，求得直线与垂面的交点为 $M_1\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$。因坐标原点O及$M,M_1$在所求平面上，所以可得平面三点式方程为

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-0\\ 1-0 & -1-0 & 0-0\\ \frac{4}{3}-0 & -\frac{1}{3}-0 & -\frac{5}{3}-0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\end{vmatrix}=0$$

整理得

$$5x+5y+3z=0。$$

57.

解　先将二直线方程化标准式为

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$$

与

$$\frac{x}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-2}{7}$$

则公垂线的方向向量为

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{12, -20, 4\}$$

因此可得

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z \\ 12 & -20 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$x - 3z + 1 = 0$$

同理得

$$\begin{vmatrix} x & y+5 & z-2 \\ 12 & -20 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$37x + 20y - 11z + 122 = 0$$

则公垂线方程为

$$\begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ 37x + 20y - 11z + 122 = 0. \end{cases}$$

58.

解　先求公垂线方程，因为公垂线的方向向量为

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{1, -1, 1\}$$

所以有

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

和

$$\begin{vmatrix} x & y+3 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

展开后整理，即得公垂线方程

$$\begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ 5x + y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

将公垂线方程改为平面束方程

$$5x+y-4z-1+\lambda(x-z+4)=0$$

或

$$(5+\lambda)x+y+(-4-\lambda)z+(-1+4\lambda)=0$$

因为所求平面在平面束中（图36），且平行于向量$\vec{c}$，所以有

$$(5+\lambda)\times 1+1\times 0+(-4-\lambda)\times(-1)=0$$

由此解得

$$\lambda=-\frac{9}{2}$$

代入面束方程中，则得所求平面方程

$$x+2y+z-38=0.$$

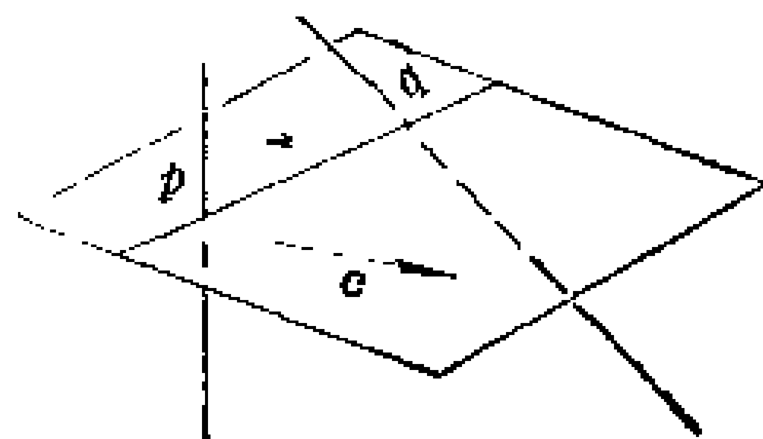


图 36

59.

解 设直线方程为

$$x=lt+1,\ y=mt+1,\ z=nt+\sqrt{2} \qquad (1)$$

由于直线和 Oz 轴构成$\frac{\pi}{3}$角，根据二直线的夹角公式得

$$\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{1}{2}$$

即

$$3n^2=l^2+m^2 \qquad (2)$$

又因所求直线与已知直线相交，则（1）式满足已知直线方程，从而有

$$\frac{lt-1}{1}=\frac{mt}{2}=\frac{nt+\sqrt{2}}{2}$$

即

$$2(lt-1)=mt \qquad (3)$$

$$mt=nt+\sqrt{2} \qquad (4)$$

由（3）式得

$$t=\frac{2}{2l-m}$$

代入（4）式，整理为

$$2\sqrt{2}l-(2+\sqrt{2})m+2n=0 \tag{5}$$

由（5）式与（2）式联立，解得

$$l:m:n=1:\sqrt{2}:1$$

或 $\quad l:m:n=23:(60-35\sqrt{2}):(25-28\sqrt{2})$

则所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z-\sqrt{2}}{1}$$

和

$$\frac{x-1}{23}=\frac{y-1}{60-35\sqrt{2}}=\frac{z-\sqrt{2}}{25-28\sqrt{2}}.$$

60.

解 因为所求直线通过原点，因此可设为

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

又因直线与 Ox 轴和 Oz 轴构成等角，所以

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

而

$$l^2+m^2+n^2\neq 0$$

则

$$l=n \tag{1}$$

另一方面，已知直线的方向向量为

$$\vec{a}_1=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right\}=\{-2,2,4\}$$

利用二直线的交角公式得

$$\frac{-2l+2m+4n}{\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\cos\frac{\pi}{3}$$

即

$$2(-l+m+2n)^2=3(l^2+m^2+n^2) \tag{2}$$

由（1），（2）式得

$$m^2+4l^2-4lm=0$$

或

$$(m-2l)^2=0$$

则

$$l=\frac{1}{2}m$$

$$\therefore \quad l:m:n=1:2:1$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}.$$

61.

解　因为点 M' 在通过点 M 且垂直于已知直线的垂面上（图37），所以先求过点 M 的垂面方程. 由于已知直线的方向向量为

$$\vec{a}=\left\{\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{6,-6,3\}$$

则可取所求垂面的法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{3}\vec{a}=\{2,-2,1\}$$

从而垂面方程为

$$2(x-1)-2(y-1)+(z+6)=0$$

即

$$2x-2y+z+6=0$$

将垂面方程与已知直线方程联立

$$\left.\begin{array}{l}2x-2y+z+6=0\\ x-y-4z+12=0\\ 2x+y-2z+3=0\end{array}\right\}$$

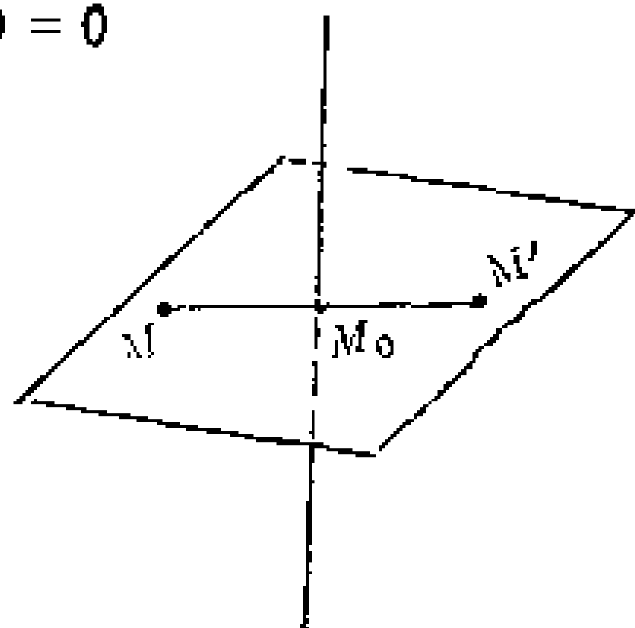


图 37

得到交点坐标 $M_0(-1,3,2)$，

由于点 M_0 是两点 M, M' 连线的中点，利用中点坐标公式，得

$$-1=\frac{1+x}{2},\qquad 3=\frac{1+y}{2},\qquad 2=\frac{-6+z}{2}$$

由此解得

$$x=-3,\ y=5,\ z=10$$

即点M的对称点为 $M'(-3,5,10)$。

62.

解 (1) $\because\quad \vec{a}=\{1,1,4\},\quad \overrightarrow{OM}=\{1,2,13\}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\{1,1,-14\}$$

而

$$|\vec{a}\times\overrightarrow{MP}|=\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -14\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4 & 1\\ -14 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2}$$

$$=\sqrt{648}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=\sqrt{18}$$

利用点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{MP}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{648}}{\sqrt{18}}=\sqrt{36}=6$$

即点M到直线（1）的距离 $d=6$。

（2）在已知直线上任取一点 $M(-1,-6,-13)$，则

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\{3,9,12\}$$

而

$$\vec{a}=\left\{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}\right\}=\{-2,-1,2\}$$

利用点到直线的距离公式，则有

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}9 & 12\\ -1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}12 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & 9\\ -2 & -1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{45}{3}=15$$

即点M到直线（2）的距离为 $d=15$。

63.

解法一 因为与点P距离最小的点M_0就是点P在直线上的垂足，为此先求过点P且与直线垂直的平面方程，即

$$(x-3)+2(y-2)-(z-6)=0$$

或

$$x+2y-z-1=0 \qquad (1)$$

将已知直线方程化为参数式

$$x=t,\ y=2t-7,\ z=-t+3 \qquad (2)$$

代入（1）式中，得

$$t+2(2t-7)-(-t+3)-1=0$$

即

$$6t-18=0 \text{ 或 } t=3$$

将t值代入（2）式中，求得直线与垂面的交点为

$$x=3,\ y=-1,\ z=0$$

因此所求之点为$M_0(3,-1,0)$。

解法二 因为所求点M_0在已知直线上，所以点M_0的坐标满足直线的参数方程

$$x=t,\ y=2t-7,\ z=-t+3 \qquad (*)$$

由两点间距离公式，得

$$\begin{aligned}d^2&=(t-3)^2+(2t-9)^2+(-t-3)^2\\&=6t^2-36t+99\\&=6(t-3)^2+45\end{aligned}$$

显然，当$t=3$时，距离d为最小，将$t=3$代入(*)式，得

$$x=3,\ y=-1,\ z=0$$

即所求之点为$M_0(3,-1,0)$。

64.

解 设所求之点为$P(0,0,z)$，由已知直线上的点$M(1,-1,0)$向点P引向量$\overrightarrow{MP}$，则

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\{-1,1,z\}$$

面

$$|\vec{a}\times\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ z & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

$$= \sqrt{(2z+2)^2 + (2-z)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{5z^2 + 4z + 17}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

利用点到直线的距离公式

$$d = \frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{MP}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{5z^2+4z+17}}{3} = \sqrt{2}$$

即

$$5z^2 + 4z - 1 = 0$$

解得

$$z = -1 \quad 或 \quad z = \frac{1}{5}$$

则所求点为 $P_1(0,0,-1)$ 和 $P_2\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$。

65.

解 (1) 由二已知直线方程知

$$\vec{a}_1 = \{1, -16, 2\}, \qquad \vec{a}_2 = \{2, 1, -2\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{22, -25, 5\}$$

$$\because \quad \vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \left\{\begin{vmatrix} -16 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \{30, 6, 33\}$$

$$\therefore \quad |\vec{a}_1\times\vec{a}_2| = 3\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2} = 45$$

$$又\because \quad (\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = 30\times 22 + 6\times(-25) + 33\times 5 = 675$$

$$\therefore \quad d = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2\,\overrightarrow{M_1M_2}}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|} = \frac{675}{45} = 15$$

即二直线间的距离为 $d = 15$。

(2)解法一 将二直线方程化为标准式

$$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1} \text{ 和 } \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{-3}$$

则

$$\vec{a}_1=\{1,0,-1\}, \qquad \vec{a}_2=\{1,-4,-3\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{-2,2,0\}$$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\left\{\begin{vmatrix}0 & -1\\ -4 & -3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -4\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{-4,2,-4\}$$

从而

$$|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2}=6$$

$$\vec{a}_1\vec{a}_2\overrightarrow{M_1M_2}=(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=-4\times(-2)+2\times2-4\times0=12$$

则

$$d=\frac{\vec{a}_1\vec{a}_2\overrightarrow{M_1M_2}}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}=\frac{12}{6}=2$$

即二直线间的距离为 $d=2$。

解法二 因为二直线间的距离就是通过二直线的两个平行平面 π_1、π_2 间的距离（图38），为此先求通过二直线的两个平行平面，把已知二直线方程改为平面束方程

$$(1+\lambda)x+y+(1+\lambda)z-\lambda=0 \quad (1)$$

$$(1+\mu)x+(1-2\mu)y+(3\mu-1)z+2+\mu=0 \quad (2)$$

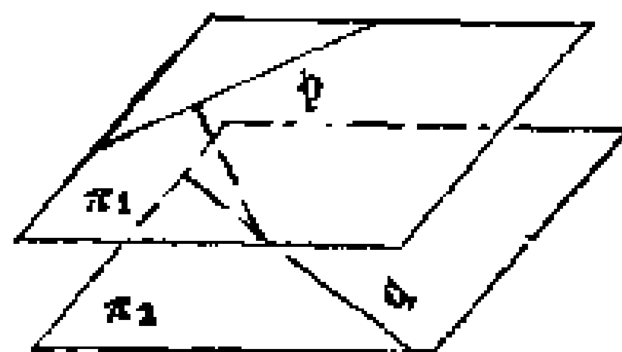


图 38

若（1）、（2）式确定的平面平行，则它们法向量的向量积为零，即

$$(1+\lambda)(1-2\mu)-(1+\mu)=0$$

$$(1+\lambda)(1+\mu)-(1+\lambda)(3\mu-1)=0$$

$$(1+\lambda)(1-2\mu)-(3\mu-1)=0$$

整理为

$$\left.\begin{aligned}2\lambda\mu-\lambda+3\mu=0\\2\lambda\mu-2\lambda+2\mu-2=0\\2\lambda\mu-\lambda+5\mu-2=0\end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$\lambda=-3,\quad \mu=1$$

代入（1），（2）式中并把它们化为法线式方程

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$$

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$$

由于上述二平行平面的法线向量方向相反，且到坐标原点的距离都是1，则二平行平面间的距离等于2，所以二直线间的距离等于2。

66.

解 因为二平行直线间距离就是其中一直线上任一点到另一直线的距离，所以可利用点到直线的距离公式来求．而点 $M_1(0,-1,6)$ 和点 $M_2(3,0,-2)$ 分别为二平行直线上的已知点，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{3,1,-8\}$$

因为二平行直线的方向向量为

$$\vec{a}=\{2,1,3\}$$

所以有

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$$

$$|\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{\begin{vmatrix}1&3\\1&-8\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3&2\\-8&3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}^2}$$

$$=\sqrt{(-11)^2+25^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{747}$$

则由点到直线的距离公式得

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{747}}{\sqrt{14}}\quad\sqrt{\frac{747}{14}}$$

即二平行直线间的距离为 $d=\sqrt{\frac{747}{14}}$.

67.

解　设直线方程为

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-2}{n}$$

因为所求直线平行于已知平面，所以直线的方向向量与平面的法向量垂直，即有

$$2l+m-n=0 \qquad (1)$$

因为 Ox 轴上的方向向量为 $\vec{i}=\{1,0,0\}$，则由二直线的距离公式，得

$$d=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ l & m & n\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}0 & 0\\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & 1\\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 0\\ l & m\end{vmatrix}^2}}=2$$

整理得

$$mn=0 \qquad (2)$$

由（1），（2）式解得

$$l:m:n=1:0:2$$

或

$$l:m:n=1:-2:0$$

于是，所求直线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{2} \quad 和 \quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{0}.$$

68.

解　依题意知，所求平面的法向量与二已知直线的方向向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 垂直．而

$$\vec{a}_1=\{2,-1,2\}, \qquad \vec{a}_2=\{0,1,-1\}$$

则

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{-1, 2, 2\}$$

又因第一条直线上的已知点 $M(0, 0, 1)$在所求平面上，则其平面方程为

$$-1(x-0) + 2(y-0) + 2(z-1) = 0$$

即

$$x - 2y - 2z + 2 = 0.$$

69.

解 先求平面 π 与直线的交点，由方程组

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\}$$

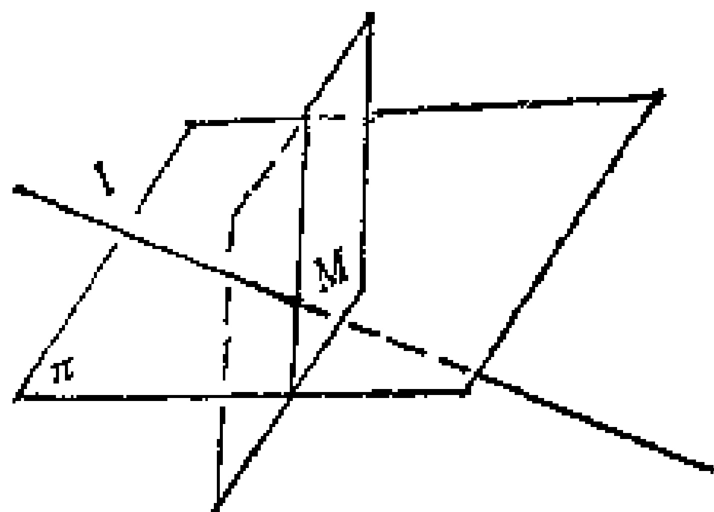


图 39

求得平面与直线的交点坐标为 $M(0, 0, -1)$，而已知直线的方向向量为

$$\vec{a}_1 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{-2, 1, -1\}$$

过点M作已知直线的垂面方程（图39）

$$-2(x-0) + (y-0) - (z+1) = 0$$

即

$$2x - y + z + 1 = 0$$

因为所求直线既在已知平面上，又垂直于已知直线，所以求得的垂面方程与已知平面方程联立，就是所求的直线方程。即

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

70.

解 将直线方程化为参数式

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t + 1$$

因为已知直线上任一点 $M(x,y,z)$ 关于 Oxy 坐标面的对称点为$M'(x,y,-z)$，所以对称直线上点的坐标满足

$$x=t,\ y=t,\ z=-(t+1)$$

即对称直线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

由对称性知，二对称直线的交点必在它们的对称平面上(图40)，若求它们的交点，可令

$$z=0$$

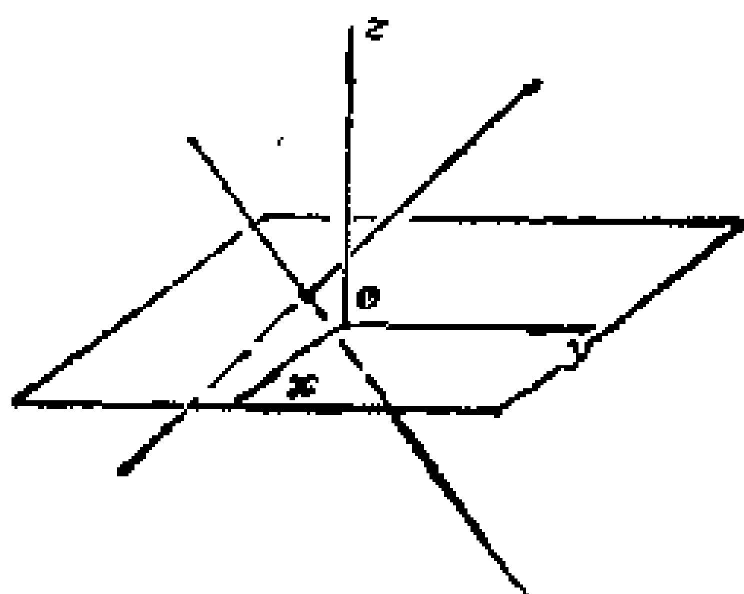


图 40

则有

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{0+1}{-1}$$

即

$$x=y=-1$$

于是二对称直线的交点为$(-1,-1,0)$.

71.

解法一 设直线方程为

$$\frac{x+1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-4}{n}$$

因为直线的方向向量和平面 π 的法向量垂直，所以有

$$3l-4m+n=0 \qquad (1)$$

又因所求直线和已知直线相交，则由共面条件得

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

即

$$6l-8m-5n=0 \qquad (2)$$

由（1），（2）式解得

$$l:m:n=4:3:0$$

于是所求直线方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{0}.$$

解法二 过点M作已知平面的平行平面

$$3(x+1)-4(y-2)+(z-4)=0$$

即

$$3x-4y+z+7=0 \qquad (*)$$

将已知直线方程化为参数式

$$x=3t-3,\ y=t+3,\ z=2t$$

代入(*)式中，解得

$$t=2$$

将t值代入直线的参数方程中，得交点坐标为

$$x=3,\ y=5,\ z=4$$

由两点式方程得

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{0}.$$

72.

解 已知二直线上的两点为$M_1(1,-1,2)$和$M_2(0,1,-2)$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{-1,2,-4\}$$

因为所求平面通过二平行直线，所以平面的法向量$\vec{n}$必垂直于直线的方向向量$\vec{a}$及$\overrightarrow{M_1M_2}$，于是可取

$$\vec{n}=\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}$$

而

$$\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{2,1,0\}$$

则所求平面方程为

$$2(x-1)+1(y+1)+0(z-2)=0$$

即

$$2x+y-1=0.$$

73.

解 将已知直线化为标准方程

$$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+3}{2}$$

和
$$\frac{x}{1}=\frac{y+7}{4}=\frac{z-10}{5}$$

设所求直线的方向向量为 $\{l,m,n\}$，则由二直线的共面条件得

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

和
$$\begin{vmatrix} 3 & -12 & 19 \\ 1 & 4 & 5 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

将上述二行列式展开后，整理为

$$\left.\begin{aligned} 9n-18l=0 \\ 24n+4m-136l=0 \end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$l:m:n=1:22:2$$

因此，所求直线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{22}=\frac{z+9}{2}.$$

74.

解 先求二已知直线与平面的交点，由方程组

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=0 \\ x+y-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{aligned}\right\}$$

解得第一条直线与平面的交点坐标为 $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$。由方程组

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=0 \\ 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{aligned}\right\}$$

解得第二条直线与平面的交点坐标为 $M_2\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 由于所求直线通过点 M_1 和 M_2, 则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与所求直线的方向向量 $\vec{a}$ 共线（图41），而

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \left\{-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right\}$$

则可取 $\vec{a} = 2\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, -2, 3\}$

于是所求直线方程为

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+\frac{1}{2}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{3}.$$

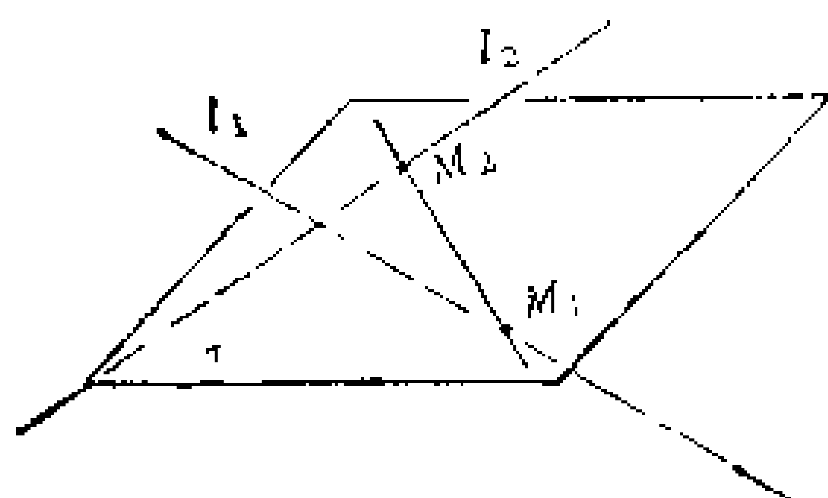


图 41

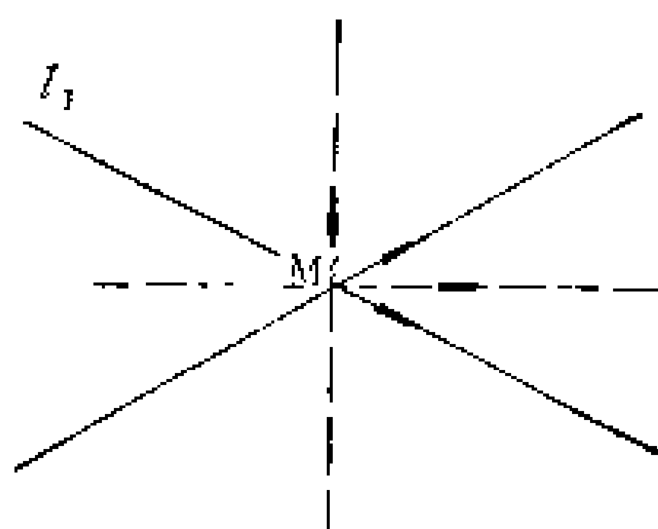


图 42

75.

解 由方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} &= y \\ y &= z \\ x-1 &= -(y-1) \end{aligned}\right\}$$

解得二直线的交点坐标为 $M'(1,1,1)$（图42）

$$\because \quad |\vec{a}_1| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad \vec{a}'_1 = \left\{\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

$$\vec{a}'_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$$

从而角平分线上的方向向量分别与$\vec{a}^\circ_1+\vec{a}^\circ_2$和$\vec{a}^\circ_1-\vec{a}^\circ_2$共线，而

$$\vec{a}^\circ_1+\vec{a}^\circ_2=\left\{\frac{3}{\sqrt{6}},\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{6}}\right\}=\frac{3}{\sqrt{6}}\{1,0,1\}$$

$$\vec{a}^\circ_1-\vec{a}^\circ_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{1,2,-1\}$$

于是二直线的角平分线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$$

和
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

76.

解 依题意知，所求直线是分别通过p_2与p_3且同时平行于p_1的两个平面的交线(图43)。因而，只要求出满足此条件的两个平面方程即可。将直线方程分别化为平面束方程

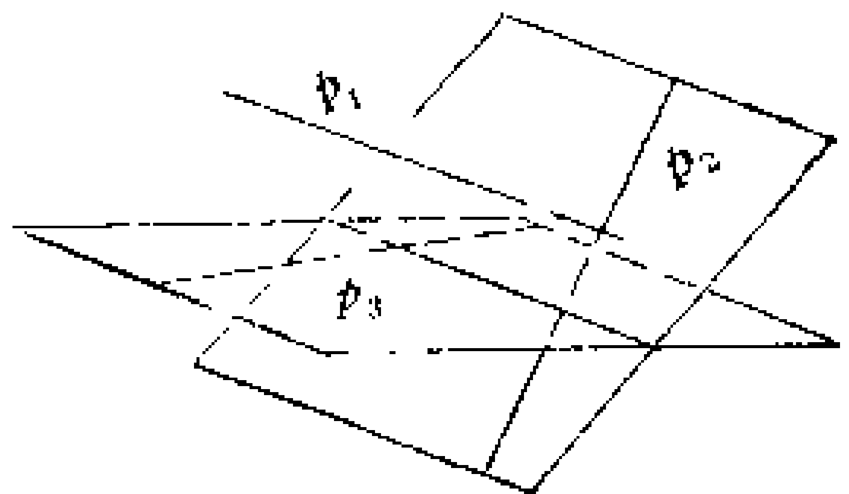


图 43

$$4x+4\lambda y-(1+\lambda)z-6+3\lambda=0 \qquad (1)$$

$$x+3\mu y-(1+\mu)z-4+\mu=0 \qquad (2)$$

若方程（1）和（2）确定的平面与直线p_1平行，则有

$$4\times4+1\times4\lambda+1\times(-1-\lambda)=0$$

$$4\times1+1\times3\mu+1\times(-1-\mu)=0$$

由此可得

$$\lambda=-5,\qquad \mu=-\frac{3}{2}$$

将λ与μ值分别代入(1)与(2)式中，则得所求的直线方程为

$$\begin{cases}4x-20y+4z-21=0\\ 2x-9y+z-11=0.\end{cases}$$

第四章　二次曲面习题解答

1.

解　将点A的坐标代入方程

$$1^2+(-2)^2+(-1)^2+4\times1-8\times(-2)-10\times(-1)-36=0$$

因为点A的坐标满足曲面方程，所以点A在曲面上。

将点B的坐标代入方程

$$(-8)^2+(-2)^2+2^2+4\times(-8)-8\times(-2)-10\times2-36=0$$

点B的坐标也满足曲面方程，所以点B也在曲面上。

将点C的坐标代入方程

$$3^2+1^2+(-2)^2+4\times3-8\times1-10\times(-2)-36=2\neq0$$

由于点C的坐标不满足方程，因此点C不在曲面上。

2.

解　设球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

代入已知点的坐标，得

$$\left.\begin{array}{l}(3-x_0)^2+(1-y_0)^2+(-3-z_0)^2=r^2\\(-2-x_0)^2+(4-y_0)^2+(1-z_0)^2=r^2\\(-5-x_0)^2+(0-y_0)^2+(0-z_0)^2=r^2\end{array}\right\}\qquad(1)$$

又因球心在已知平面上，所以，球心坐标满足平面方程，即

$$2x_0+y_0-z_0+3=0\qquad(2)$$

将（1），（2）式联立，解得

$$x_0=1,\ y_0=-2,\ z_0=3,\ r=7$$

于是球面方程为

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=49.$$

3．

解 设球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

由于球面与三坐标面相切，则球面上的点都在某一卦限内，从而球心坐标的符号与球面上已知点M的符号相同，即有

$$x_0>0,\ y_0>0,\ z_0<0$$

但因球面与三个坐标面相切，则球心到坐标面的距离都等于半径 r，即球心坐标满足条件

$$x_0=y_0=r,\ z_0=-r\ \ (r>0)$$

将已知点M的坐标和上述条件代入所设球面方程中，得

$$(1-r)^2+(2-r)^2+(-5+r)^2=r^2$$

即

$$2r^2-16r+30=0$$

解得

$$r=3\ 或\ r=5$$

于是，所求球面方程为

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$$

和 $$(x-5)^2+(y-5)^2+(z+5)^2=25.$$

4．

解 设点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$为球心，因为A，B 两点在球面上，所以它们到球心的距离相等，即

$$\sqrt{(1-x_0)^2+(5-y_0)^2+(-3-z_0)^2}$$
$$=\sqrt{(-3-x_0)^2+(0-y_0)^2+(0-z_0)^2}$$

整理得

$$4x_0+5y_0-3z_0-13=0 \tag{1}$$

又因球心在已知直线上，所以球心坐标满足直线方程，即

$$\begin{cases}3x_0-y_0-2z_0=0 & (2)\\ x_0+2y_0-4=0 & (3)\end{cases}$$

由（1），（2），（3）式解得

$$x_0=0,\ y_0=2,\ z_0=-1$$

而

$$r=|AM_0|=\sqrt{(1-0)^2+(5-2)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{14}$$

则所求球面方程为

$$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=14.$$

5.

证 设点 $P(x, y, z)$ 为通过点 M_0 的任一条切线上的任意一点（图44），由球面上切线的性质知，向量

$$\overrightarrow{OM_0}\perp\overrightarrow{M_0P} \tag{1}$$

而

$$\overrightarrow{OM_0}=\{x_0, y_0, z_0\}$$

$$\overrightarrow{M_0P}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_0}\cdot\overrightarrow{M_0P}&=x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)\\&=x_0x+y_0y+z_0z-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\end{aligned}$$

由条件（1），得

$$x_0x+y_0y+z_0z-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=0 \tag{2}$$

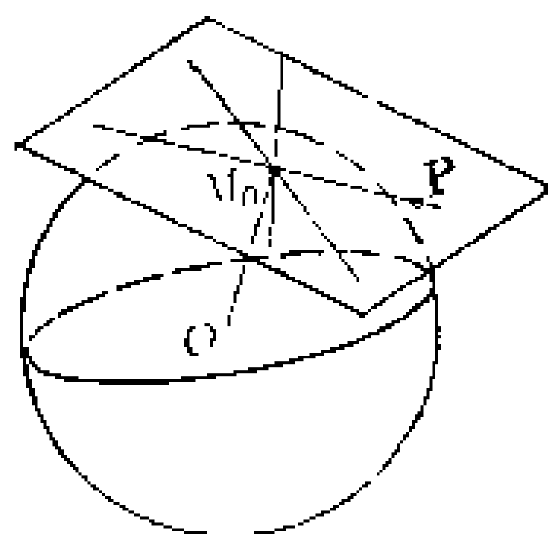


图 44

又因点 M_0 在球面上，所以

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2$$

从而（2）式为

$$x_0x+y_0y+z_0z-r^2=0$$

由于点 P 的任意性，则过点 M_0 的切面方程为

$$xx_0+yy_0+zz_0=r^2.$$

6.

解 将球面方程整理为

$$(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=19$$

由上题结论知，过点 M_0 的切面方程为

$$(x-3)(x_0-3)+yy_0+(z+2)(z_0+2)=49$$

代入点 M_0 的坐标，得

$$(x-3)(1-3)+6y+(z+2)(-5+2)=49$$

即通过点 M_0 的切平面方程为

$$2x-6y+3z+49=0.$$

7.

解 （1）依题意得

$$x+y+z=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

将两端平方并整理得

$$xy+yz+xz=0.$$

（2）因为点M到 Ox 轴和 Oy 轴的距离为

$$d_1=\sqrt{y^2+z^2} \quad 与 \quad d_2=\sqrt{x^2+z^2}$$

依题意得

$$y^2+z^2-(x^2+z^2)=a$$

即

$$y^2-x^2-a=0.$$

（3）依题意得

$$\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}=a$$

将两端平方并整理为

$$a^2x^2-y^2+(a^2-1)z^2=0.$$

（4）点M到坐标原点的距离为

$$d_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

点M到平面的距离为

$$d_2=\frac{|z-4|}{\sqrt{0^2+0^2+1}}=|z-4|$$

依题意得

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4|$$

将两端平方并整理得

$$x^2+y^2=-8(z-2).$$

8.

解 若在空间直角坐标系中，则方程（1）表示母线平行

于 Oz 轴的圆柱面。方程（2）表示母线平行于 Oz 轴的抛物柱面。方程（3）表示母线平行于 Oz 轴的双曲柱面。方程（4）表示与 Oz 轴重合的一条直线。方程（5）表示与 Oz 轴重合的一条直线和与 Oz 轴平行的一个平面。

9.

解 设顶点坐标为 $C(x, y, z)$，由等腰三角形的性质得

$$|AC| = |BC|$$

即

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2}$$
$$=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$

将两端平方并整理得

$$3x+3y+2z-17=0.$$

10.

解 （1）因为是两个平面方程，所以它确定一条空间直线。

（2）将方程 $z=0$ 代入方程

$$x^2+y^2+z^2=9$$

得

$$x^2+y^2=9$$

此方程确定 Oxy 平面上的一个半径等于3的圆。

（3）将方程 $y=0$ 代入方程

$$x^2+2y^2+4z^2=36$$

得

$$x^2+4z^2=36$$

即

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$$

此方程确定 Oxz 平面上以长半轴等于6，短半轴等于3的一个椭圆。

（4）将方程 $x-y=0$ 代入方程

$$x^2+y^2=18$$

得

$$2y^2=18$$

即

$$y=\pm 3$$

从而有 $x=y=\pm 3$。由于对任意的 z，x 与 y 的值均不变，所以（4）式确定两条平行于 Oz 轴且分别过点（3，3，0）和（-3，-3，0）的直线。

11.

解 （1）由第三个方程

$$z=-(2t+1)$$

解得

$$t=\frac{z+1}{-2}$$

从而

$$x=\left(-\frac{z+1}{2}+1\right)^2=\frac{1}{4}(z^2-2z+1)$$

即

$$z^2-4x-2z+1=0$$

再由第一式和第二式得

$$y=2x$$

于是，曲线方程（1）为$\begin{cases} y=2x \\ z^2-4x-2z+1=0. \end{cases}$

（2）$\because$ $y^2=(4\cos t)^2$

$z^2=(4\sin t)^2$

$\therefore$ $y^2+z^2=16(\cos^2 t+\sin^2 t)=16$

且

$$4x=4\times 3\sin t=3\times(4\sin t)=3z$$

则曲线方程（2）为 $\begin{cases} 4x-3z=0 \\ y^2+z^2=16. \end{cases}$

（3）$\because$ $\frac{x}{a}=\cos t$

$\frac{y}{b}=\sin t$

$\therefore$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$

从而曲线方程（3）为$\begin{cases} z=c \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \end{cases}$

（4）由 $z=2t$，得

$$t=\frac{z}{2}$$

于是

$$y=2t^2=2\frac{z^2}{4}=\frac{z^2}{2}$$

$$x=1\pm\sqrt{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}$$

将以上二式整理得

$$z^2-2y=0$$

$$4x^2-8x+z^2=0$$

则曲线方程（4）为$\begin{cases} z^2-2y=0 \\ 4x^2-8x+z^2=0. \end{cases}$

12.

解 （1）因为第一个方程确定 Oxy 平面上的一个圆，则可令

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$$

将 y 代入第二个方程中，解出 z，得

$$z=\pm\cos\theta$$

于是方程（1）的参数方程为

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos\theta \\ y&=\sin\theta \\ z&=\pm\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

（2）因为第二个方程确定 Oxy 平面上中心为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$ 的一个圆，则可令

$$x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta),\qquad y=\frac{a}{2}\sin\theta$$

将以上二式代入第一个方程，得

$$z=\pm a\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$$

于是，方程（2）的参数方程为

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)\\ y=\frac{a}{2}\sin\theta\\ z=\pm a\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)} \end{array}\right\}.$$

13.

解　将第一个方程乘以 2 加于第二个方程，得

$$5y^2+5z^2-20z=0$$

即

$$y^2+z^2-4z=0$$

再将第二个方程乘以 −2 加于第一个方程，得

$$-5z^2+20x+20z=0$$

即

$$z^2-4x-4z=0$$

则表示曲线的两个柱面方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2-4z=0\\ z^2-4x-4z=0. \end{cases}$$

14.

解　将平面方程 $x=2$ 代入曲面方程，得

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

整理为

$$\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{3})^2}=1 \qquad (1)$$

因为方程（1）是 Oyz 平面上的椭圆方程，所以曲面与平面的交线是一个椭圆．此椭圆所在的平面为 $x=2$，且椭圆的两个半轴分别为

$$b=3, \qquad c=\sqrt{3}$$

在方程（1）中，若令 $z=0$，则得

$$y=\pm 3$$

若令 $y=0$，则得

$$z=\pm\sqrt{3}$$

由于顶点在平面 $x=2$ 上，于是椭圆的四个顶点坐标分别为

$(2,3,0)$、$(2,-3,0)$、$(2,0,\sqrt{3})$和$(2,0,-\sqrt{3})$．

15．

解 因为曲线在 Oxy 坐标面上的投影就是通过曲线且垂直于 Oxy 坐标面的柱面与 Oxy 坐标面的交线，所以，只要从确定曲线的两个曲面方程中消去含有 z 的项，则可得到垂直于 Oxy 坐标面的柱面方程

$$x^2+y^2-x-1=0$$

于是得到在 Oxy 坐标面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-x-1=0. \end{cases}$$

16．

解 将 $x=3$ 代入曲线方程，得

$$\begin{cases} y^2+z^2=40 \\ y^2+z^2-4z=16 \end{cases}$$

解此方程组，求得

$$y=\pm 2 \qquad z=6$$

则所求点M为 $(3,2,6)$ 和 $(3,-2,6)$．

17．

解 设圆心坐标为 $C(x_0, y_0, z_0)$，由球面的性质知，点C在通过球心日与已知平面垂直的直线上（图45），而此直线

方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$$

或

$$x=t,\ y=t,\ z=2t \tag{1}$$

又因圆心C在已知平面上，所以坐标满足平面方程

$$x+y+2z-1=0 \tag{2}$$

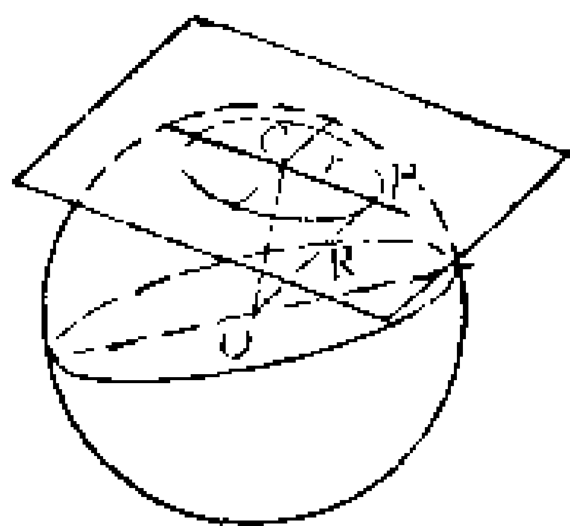


图 45

由（1），（2）式解得

$$x_0=\frac{1}{6},\quad y_0=\frac{1}{6},\quad z_0=\frac{1}{3}$$

即圆心坐标为$C\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$.

为求半径 r，先在圆上取一点$P(1,\ 0,\ 0)$，注意点P即在球面上又在平面上。

则

$$|CP|=r$$

而

$$|CP|=\sqrt{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

于是，所求圆心为$C\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)$，半径$r=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

18.

证　将曲线方程代入曲面方程中

$$\begin{aligned}&5(3\sin t)^2-3(4\sin t)^2-3(\cos t)^2+3\\&=45\sin^2 t-48\sin^2 t-3\cos^2 t+3\\&=-3(\sin^2 t+\cos^2 t)+3\\&=0\end{aligned}$$

由于对任意的实数 t，上式都成立，即曲线上任一点的坐标都满足曲面方程，所以整条曲线都在曲面上。

19.

解　（1）因为方程中关于流动坐标 y^2 与 z^2 的系数相同，所以是旋转曲面。此曲面是由曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 Ox 轴旋转生成的。

（2）因为方程中关于流动坐标 x^2 与 z^2 的系数相同，所以是旋转曲面。此曲面是由曲线 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 Oy 轴旋转生成的。

（3）因为方程中任意两个流动坐标的系数均不相同，所以不是旋转曲面。

（4）因为方程中关于流动坐标 y^2 与 z^2 的系数相同，所以是旋转曲面。此曲面是由曲线 $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-z^2=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 Ox 轴旋转生成的。

（5）因为方程中三个流动坐标的系数都相同，且流动坐标都是二次的，所以是旋转曲面。此曲面是由任意坐标面上的圆（圆心在坐标原点，半径为1），绕其坐标面上的一坐标轴旋转生成的。

（6）因为方程中任意两个流动坐标的系数均不相同，所以不是旋转曲面。

20．

解　（1）因为母线绕 Ox 轴旋转，所以

$$x=X,\quad |y|=\sqrt{Y^2+Z^2}$$

将上式代入方程

$$4x^2-9y^2=36$$

则得旋转曲面方程

$$4X^2-9Y^2-9Z^2=36.$$

（2）因为母线绕 Oy 轴旋转，所以

$$y=Y,\ \sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{X^2+Z^2} \qquad (*)$$

另一方面，由母线方程得

$$x=\frac{1}{2}, \qquad z=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则

$$x^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

由（*）式知，旋转曲面方程为

$$X^2+Z^2=1.$$

（3）因为母线绕 Oz 轴旋转，所以

$$z=Z, \qquad |x|=\sqrt{X^2+Y^2}$$

将上式代入方程

$$xz=8$$

则得旋转曲面方程

$$(\pm\sqrt{X^2+Y^2})Z=8$$

即

$$(X^2+Y^2)Z^2=64.$$

（4）因为母线绕 Ox 轴旋转，所以

$$x=X \quad ,|z|=\sqrt{Y^2+Z^2}$$

将上式代入方程

$$z=\operatorname{tg}x$$

则得旋转曲面方程

$$\pm\sqrt{Y^2+Z^2}=\operatorname{tg}X$$

或

$$Y^2+Z^2=\operatorname{tg}^2X.$$

21.

证 设 x，y，z 为动点坐标，依题意建立等式

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$$

整理得

$$3x^2+3y^2-z^2=0$$

由于上面方程中的 x^2 与 y^2 的系数相同，因此是一旋转曲面.

即动点轨迹是一旋转曲面。

22.

证 设点 D_1、D_2 的坐标为 $(0, 0, c)$ 与 $(0, 0, -c)$，依题意建立等式

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z+c)^2}=2a$$

即

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}=2a$$

或

$$\sqrt{(x^2+y^2)+(z-c)^2}+\sqrt{(x^2+y^2)+(z+c)^2}-2a=0$$

从而上式可写为

$$F(x^2+y^2, z)=0$$

所以满足题设条件的动点轨迹是一旋转曲面。

23.

证 依题意建立等式

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\frac{1}{2}|x-4|$$

整理得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{3}=1$$

因为上式确定一椭圆面，且 y^2 与 z^2 的系数相同，所以动点的轨迹是一旋转椭圆面。

24.

解 因为平面 $x-2y=0$ 只含有 Oz 轴，所以只能绕 Oz 轴旋转，从而有

$$z=Z, \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$$

由曲线方程知，

$$x=2y \tag{1}$$

则

$$\sqrt{(2y)^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$$

即

$$|y| = \sqrt{\frac{1}{5}\left(X^2 + Y^2\right)} \qquad (2)$$

将（1）、（2）式及 $z = Z$ 代入方程

$$x^2 + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$$

中，并整理得

$$\frac{9}{10}X^2 + \frac{9}{10}Y^2 - Z^2 = 1.$$

25.

解 设伸缩变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= aX \\ y &= bY \\ z &= cZ \end{aligned}\right\}$$

代入原方程，得

$$\frac{a^2X^2}{64} + \frac{b^2Y^2}{25} + \frac{c^2Z^2}{16} = 1$$

与变换后的方程比较得

$$\frac{a^2}{64} = \frac{1}{36}, \quad \frac{b^2}{25} = \frac{1}{16}, \quad \frac{c^2}{16} = \frac{1}{9}$$

即

$$a = \pm\frac{4}{3}, \qquad b = \pm\frac{5}{4}, \qquad c = \pm\frac{4}{3}$$

但由定义知，伸缩变换系数大于零，于是所求伸缩变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4}{3}X \\ y &= \frac{5}{4}Y \\ z &= \frac{4}{3}Z \end{aligned}\right\}.$$

26.

解 因为母线绕 Ox 轴旋转，所以

$$x = x' \qquad |y| = \sqrt{y'^2 + z'^2}$$

将上式代入方程

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

中，得

$$(x'-2)^2 + y'^2 + z'^2 = 9$$

即

$$\frac{(x'-2)^2}{9} + \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{9} = 1$$

代入伸缩变换公式得

$$\frac{\left(\frac{2}{3}X - 2\right)^2}{9} + \frac{Y^2}{9} + \frac{\left(\frac{4}{3}Z\right)^2}{9} = 1$$

整理得

$$\frac{(X-3)^2}{\frac{81}{4}} + \frac{Y^2}{9} + \frac{Z^2}{\frac{81}{16}} = 1.$$

27.

解 将平面方程 $z = h$ 代入椭圆面方程

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{h^2}{4} = 1$$

整理后，得到一组相似椭圆

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{4-h^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\sqrt{4-h^2}\right)^2} = 1 \tag{1}$$

其中 h 为相似椭圆的参数 $(-2 \leqslant h \leqslant 2$，当 $|h| = 2$ 时，$x = 0$，$y = 0)$，则

$$a = 2\sqrt{4-h^2}, \qquad b = \frac{3}{2}\sqrt{4-h^2}$$

从而

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{4-h^2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{4-h^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}(4-h^2)}$$

因为对任意的 $h(-2\leqslant h\leqslant 2)$，（1）式所确定的椭圆长轴均在$Oxz$ 坐标面上，所以相似椭圆的焦点坐标为

$$x = \sqrt{\frac{7}{4}(4-h^2)}\ ,\ y=0,\ \ z=h$$

即焦点坐标满足方程

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{7}{4}(4-z^2)} \\ y=0 \end{cases}$$

整理为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7}+\dfrac{z^2}{4}=1 \\ y=0. \end{cases}$$

28.

解 设平面方程为

$$y=kz \tag{1}$$

代入椭圆面方程并整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{\dfrac{b^2c^2}{c^2k^2+b^2}}=1 \tag{2}$$

因为由（1），（2）式确定的圆通过 Ox 轴，所以圆的半径等于 a，且圆心在坐标原点。

在圆上任取一点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则有

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=a \tag{3}$$

为计算简单起见，不妨令 $x_0=0$，则由（1），（2）式得

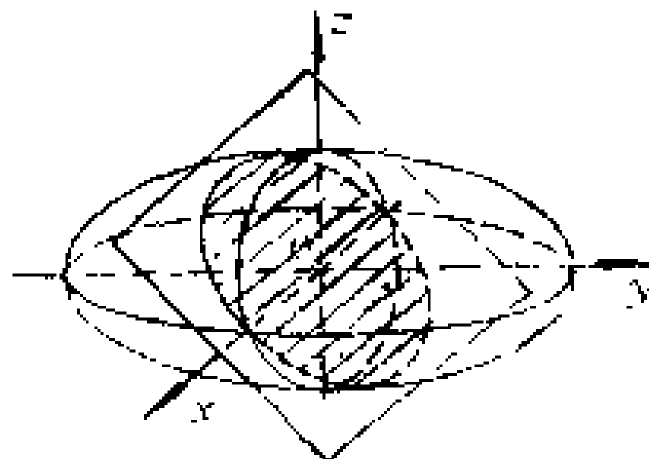


图 46

$$y_0=kz_0,\qquad z_0=\sqrt{\frac{b^2c^2}{c^2k^2+b^2}}\ \text{（负号舍去）}$$

代入（3）式中，得

$$\sqrt{\frac{k^2b^2c^2}{c^2k^2+b^2}+\frac{b^2c^2}{c^2k^2+b^2}}=a$$

由此解得

$$k=\pm\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}$$

于是，所求平面方程为

$$y=\pm\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}z\ .$$

29.

证 依题意，通过坐标原点的射线方程为

$$x=\lambda t,\ y=\mu t,\ z=\nu t$$

设射线与曲面的交点为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则

$$\begin{aligned}r^2&=x_0^2+y_0^2+z_0^2\\&=(\lambda t_0)^2+(\mu t_0)^2+(\nu t_0)^2\\&=(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t_0^2\end{aligned}$$

但因

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

所以

$$r^2=t_0^2 \tag{*}$$

由于点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 在椭圆面上，从而有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

即

$$\frac{(\lambda t_0)^2}{a^2}+\frac{(\mu t_0)^2}{b^2}+\frac{(\nu t_0)^2}{c^2}=1$$

则求得

$$t_0^2=\frac{1}{\dfrac{\lambda^2}{a^2}+\dfrac{\mu^2}{b^2}+\dfrac{\nu^2}{c^2}}$$

或

$$\frac{1}{t_0^2}\quad\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}$$

由(*)式，得

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}.$$

30.

证 设 α_i, β_i, γ_i $(i=1, 2, 3)$ 分别为射线与三坐标轴的夹角，则

$$\overrightarrow{OP}=\{r_1\cos\alpha_1,\ r_1\cos\beta_1,\ r_1\cos\gamma_1\}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\{r_2\cos\alpha_2,\ r_2\cos\beta_2,\ r_2\cos\gamma_2\}$$

$$\overrightarrow{OR}=\{r_3\cos\alpha_3,\ r_3\cos\beta_3,\ r_3\cos\gamma_3\}$$

因为点 P、Q、R 在椭圆面上，所以

$$\frac{r_1^2\cos^2\alpha_1}{a^2}+\frac{r_1^2\cos^2\beta_1}{b^2}+\frac{r_1^2\cos^2\gamma_1}{c^2}=1$$

$$\frac{r_2^2\cos^2\alpha_2}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\beta_2}{b^2}+\frac{r_2^2\cos^2\gamma_2}{c^2}=1$$

$$\frac{r_3^2\cos^2\alpha_3}{a^2}+\frac{r_3^2\cos^2\beta_3}{b^2}+\frac{r_3^2\cos^2\gamma_3}{c^2}=1$$

或

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{\cos^2\alpha_1}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_1}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_1}{c^2}$$

$$\frac{1}{r_2^2}=\frac{\cos^2\alpha_2}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_2}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_2}{c^2}$$

$$\frac{1}{r_3^2}=\frac{\cos^2\alpha_3}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_3}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_3}{c^2}$$

等式两端分别相加，得

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)$$

$$+\frac{1}{b^2}(\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3)$$

$$+\frac{1}{c^2}(\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3) \qquad (*)$$

由题设：三条射线两两垂直，因而它们可看做新的坐标系三个轴的方向。于是 α_1、α_2、α_3 是 Ox 轴与三个新坐标轴的夹角，β_1、β_2、β_3，γ_1、γ_2、γ_3 分别是 Oy 轴与 Oz 轴和三个新坐标轴的夹角，由方向余弦性质，得

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$$

$$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1$$

$$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1$$

将以上三等式代入等式(＊)中，得

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

31.

证 $\because$ $\frac{x}{a}=\cos\varphi\cos\theta$

$$\frac{y}{b}=\cos\varphi\sin\theta$$

$$\frac{z}{c}=\sin\varphi$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\cos^2\varphi\cos^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi$$

$$=\cos^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\sin^2\varphi$$

$$=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$$

$$=1$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所以原参数方程确定的曲面是椭圆面。

32.

解 设平行于 Oxz 坐标面的平面方程为

$$y=h$$

代入单叶双曲面方程，得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{h^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$$

或

$$\frac{1}{4}(x^2-z^2)=1-\frac{h^2}{9} \tag{1}$$

若令

$$1-\frac{h^2}{9}=0 \tag{2}$$

则方程（1）在平面 $y=h$ 上确定一对相交直线

$$x^2-z^2=0 \text{ 或 } x=\pm z$$

由（2）式解得

$$h=\pm 3$$

于是，平行于 Oxz 坐标面的平面方程为

$$y=\pm 3.$$

设平行于 Oyz 坐标面的平面方程为

$$x=k$$

代入单叶双曲面方程，得

$$\frac{k^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$$

或

$$\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1-\frac{k^2}{4} \tag{3}$$

若令

$$1-\frac{k^2}{4}=0 \tag{4}$$

则方程（3）在平面 $x=k$ 上确定一对相交直线

$$\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0 \text{ 或 } y=\pm\frac{3}{2}z$$

由（4）式解得

$$k=\pm 2$$

于是，平行于 Oyz 坐标面的平面方程为

$$x = \pm 2.$$

33.

解　将平面方程代入曲面方程，得

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = 1$$

或

$$\frac{y^2}{\frac{m^2}{m^2-1}} + \frac{\left(z - \frac{m}{m^2-1}\right)^2}{\frac{m^2}{(m^2-1)^2}} = 1 \tag{1}$$

因为（1）式为平面

$$x + mz - 1 = 0$$

上的曲线，若此曲线是椭圆，则必有

$$\frac{m^2}{m^2-1} > 0$$

于是解得

$$|m| > 1$$

若曲线是双曲线，则必有

$$\frac{m^2}{m^2-1} < 0$$

于是解得

$$|m| < 1 \qquad m \neq 0$$

因此，当平面与曲面的交线是椭圆时，数 m 的取值范围为 $|m| > 1$，当交线是双曲线时，数 m 的取值范围为 $|m| < 1$，且 $m \neq 0$。

34.

解　将 $y = h$ 代入单叶双曲面方程中，得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

分三种情况讨论。

一、当 $|h| < b$ 时，（1）式为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}>0$$

或

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2)}-\frac{z^2}{\frac{c^2}{b^2}(b^2-h^2)}=1 \qquad (2)$$

因为对任意的 $h(|h|<b)$，方程（2）都确定 $y=h$ 平面上的双曲线，此双曲线的顶点在 Oxy 坐标面上的平行于 Ox 轴的直线上，其坐标为

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2},\ y=h,\ z=0$$

由此可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2-h^2}{b^2}+\frac{h^2}{b^2}=\frac{b^2}{b^2}=1$$

于是当 $|h|<b$ 时，双曲线顶点的轨迹是一椭圆，其方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0\end{cases} \qquad (*)$$

二、当 $|h|>b$ 时，（1）式为

$$-\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}(h^2-b^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{b^2}(h^2-b^2)}=1 \qquad (3)$$

因为（3）式确定 $y=h$ 平面上，实轴在 Oyz 坐标面，且平行于 Oz 轴的双曲线，从而方程（3）所确定的双曲线的顶点坐标为

$$x=0,\ y=h,\ z=\pm\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$$

由此可得

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{b^2}-\frac{h^2-b^2}{b^2}=\frac{b^2}{b^2}=1$$

于是当 $|h|>b$ 时，截得双曲线顶点的轨迹是一双曲线，其方

程为

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\,.\end{array}\right. \qquad (**)$$

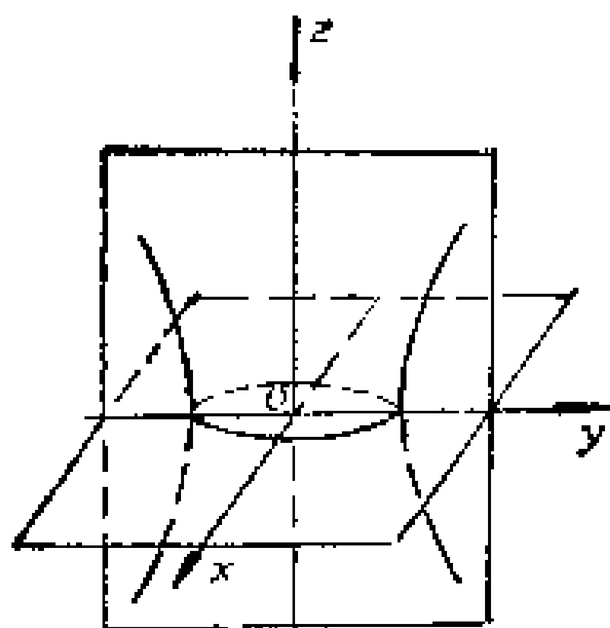


图 47

三、当 $|h|=b$时，（1）式确定两对相交直线，它们的顶点（即交点）坐标为 $(0, b, 0)$ 和 $(0, -b, 0)$。这两点就是椭圆(*)和双曲线(**)的交点（图47）。

由以上三种情况可知，截得双曲线的顶点的轨迹是 Oxy 坐标面上的一个椭圆和 Oyz 坐标面上的一条双曲线。

35.

解 设点 $M(X, Y, Z)$ 为动直线上的点，l, m, n 为动直线的方向向量，则其方程为

$$\frac{x-X}{l}=\frac{y-Y}{m}=\frac{z-Z}{n}$$

由于动直线在三已知直线上滑动，因面满足共面条件，即有

$$\begin{vmatrix} X & Y-1 & Z\\ 2 & 0 & -1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} X-2 & Y & Z\\ 0 & 1 & 1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0,$$

和

$$\begin{vmatrix} X & Y+1 & Z\\ 2 & 0 & 1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$$

将以上三个行列式展开后并整理得

$$\left.\begin{array}{r} l(1-Y)+m(X+2Z)+n(2-2Y)=0\\ l(Y-Z)+m(2-X)+n(X-2)=0\\ l(Y+1)+m(2Z-X)+n(-2-2Y)=0\end{array}\right\} \quad (*)$$

因为 l, m, n 是动直线的方向向量，所以齐次方程组式(*)关于l, m, n 应有非零解，于是

$$\begin{vmatrix} 1-Y & X+2Z & 2-2Y \\ Y-Z & 2-X & X-2 \\ Y+1 & 2Z-X & -2-2Y \end{vmatrix} = 0$$

展开后整理为

$$2X^2+8Y^2-8Z^2-8=0$$

即

$$\frac{X^2}{4}+Y^2-Z^2=1$$

也就是动直线的轨迹是单叶双曲面。

36.

解 设所求平面方程为

$$x=kz$$

代入曲面方程，得

$$\frac{k^2z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

或

$$\frac{c^2k^2-a^2}{a^2c^2}z^2=1-\frac{y^2}{b^2} \tag{1}$$

若

$$c^2k^2-a^2=0 \tag{2}$$

则（1）式确定平面 $x=kz$ 上的两条平行直线

$$1-\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ 或 } y=\pm b$$

由（2）式得

$$k=\pm\frac{a}{c}$$

于是所求平面方程为

$$x=\pm\frac{a}{c}z.$$

37.

解 将各点坐标代入方程中，得

$$\left.\begin{aligned} 16C + D = 0 \\ A + 20C + D = 0 \\ A + B + 48C + D = 0 \end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$A:B:C:D = \frac{1}{4}:\frac{7}{4}:\frac{-1}{16}:1$$

于是，二次曲面方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{7}} - \frac{z^2}{16} = -1.$$

38.

解 设所求直线方程为

$$\frac{x-6}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-8}{n} \tag{1}$$

将直线方程化为参数式代入曲面方程中，得

$$\frac{(lt+6)^2}{9} + \frac{(mt+2)^2}{4} - \frac{(nt+8)^2}{16} = 1$$

或整理为

$$\left(\frac{l^2}{9} + \frac{m^2}{4} - \frac{n^2}{16}\right)t^2 + \left(\frac{4}{3}l + m - n\right)t = 0 \tag{2}$$

因为所求直线在单叶双曲面上，所以对任意实数 t 都应满足方程（2），从而有

$$\frac{l^2}{9} + \frac{m^2}{4} - \frac{n^2}{16} = 0$$

$$\frac{4}{3}l + m - n = 0$$

由以上二式解得

$$l:m:n = 3:0:4$$

和

$$l:m:n=9:8:20$$

代入（1）式中，得

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-8}{4}$$

和

$$\frac{x-6}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-8}{20}.$$

39.

证 设动点为 $M(x, y, z)$，二定点的坐标为 $C_1(0, 0, c)$ 和 $C_2(0, 0, -c)$，则 $2a<2c$ $(c>0)$。依题意建立等式

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z+c)^2}$$

$$-\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-c)^2}=2a$$

或

$$\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}=2a+\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}$$

将两端平方并整理得

$$a\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}=cz-a^2$$

再将两端平方并整理得

$$a^2x^2+a^2y^2-(c^2-a^2)z^2=-a^2(c^2-a^2)$$

由于 $c>a$，因此可令 $b^2=c^2-a^2$，并以 a^2b^2 除上式两端，得

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=-1$$

从而，满足题设条件的动点轨迹是一双叶双曲面，且是旋转曲面。

40.

解 设点 $M(X, Y, Z)$ 是所求轨迹上的任一点，则过此点存在一抛物线，其方程为

$$\begin{cases}(X-x_0)^2=4(Z-z_0) & (1)\\ Y=y_0 & (2)\end{cases}$$

其中 x_0, y_0, z_0 为抛物线的顶点坐标．由于顶点在另一抛物线上，因此顶点坐标满足其方程，即

$$\begin{cases} (y_0-2)^2=9z_0 & (3) \\ x_0=0 & (4) \end{cases}$$

将（2）、（3）、（4）式中的 x_0，y_0 及 z_0 代入（1）式，得

$$X^2=4\left[Z-\frac{(Y-2)^2}{9}\right]$$

整理后，得到轨迹方程为

$$X^2+\frac{4}{9}(Y-2)^2-4Z=0.$$

41．

解　由抛物线方程可知，对称轴方程为

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x=0 \end{cases}$$

于是有

$$z=Z,\ |y-1|=\sqrt{X^2+(Y-1)^2}$$

代入抛物线方程的第一式中，得到旋转抛物面方程

$$X^2+(Y-1)^2=2Z$$

将已知伸缩变换公式代入上式，得

$$4X'^2+(Y'-1)^2=2Z'.$$

42．

解　因为已知椭圆抛物面的对称平面之一是平面 $y=0$，所以圆心在平面 $y=0$ 上（图48），由方程组

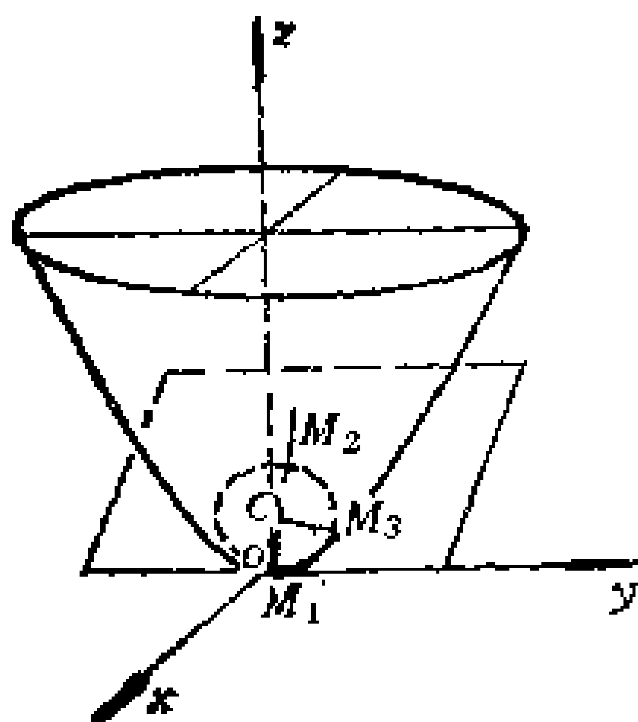


图 48

$$\left.\begin{aligned} x^2+\frac{y^2}{2}&=2z \\ x&=kz \\ y&=0 \end{aligned}\right\}$$

求得圆上两点 $M_1(0,\ 0,\ 0)$和$M_2\left(\frac{2}{k},0,\ \frac{2}{k^2}\right)$，即直径的两个端点．由于圆心 $C(x_0,y_0,z_0)$是直径$\overline{M_1M_2}$的中点，则

$$x_0=\frac{0+\frac{2}{k}}{2}=\frac{1}{k}$$

$$y_0=\frac{0+0}{2}=0$$

$$z_0=\frac{0+\frac{2}{k^2}}{2}=\frac{1}{k^2}$$

从而圆的半径为

$$r=|M_1C|=\sqrt{\left(\frac{1}{k}-0\right)^2+(0-0)^2+\left(\frac{1}{k^2}-0\right)^2}$$

$$=\frac{1}{k}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \qquad (1)$$

为确定系数 k，在圆上再取一点 M_3，不妨令 $x=\frac{1}{k}$，则由方程组

$$\left.\begin{aligned} x^2+\frac{y^2}{2}&=2z \\ x&=kz \\ x&=\frac{1}{k} \end{aligned}\right\}$$

求得点 M_3 的坐标为$\left(\frac{1}{k},\frac{\sqrt{2}}{k},\frac{1}{k^2}\right)$（注意：解上面方程组可得两组坐标，因只需一组，故另一组舍去）．由于

$$r=|CM_3|=\sqrt{\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{k}-0\right)^2+\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{k} \qquad (2)$$

由（1）、（2）式得

$$-\frac{1}{k}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{k}$$

解得

$$k=-1\ (k=1\ 舍去)$$

再代入（2）式，得

$$r=-\frac{\sqrt{2}}{k}=\sqrt{2}.$$

43.

解　在圆上任取两点 $M_1(1,\ \sqrt{2},\ 1)$，$M_2(2,\ 0,\ 2)$ 代入方程

$$Ax^2+By^2=2z$$

中，得到方程组

$$\left.\begin{aligned}A+2B&=2\\4A&=4\end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$A=1,\qquad B=\frac{1}{2}$$

于是所求方程为

$$x^2+\frac{y^2}{2}=2z.$$

44.

解　依题意知，抛物线平行移动到任意位置的方程为

$$\begin{cases}(X-x_0)^2=2(Z-z_0) & (1)\\ Y=y_0 & (2)\end{cases}$$

其中 x_0，y_0，z_0 是抛物线的顶点坐标，由于其顶点在另一抛物线上，则有

$$\begin{cases}y_0^2=-4z_0 & (3)\\ x_0=0 & (4)\end{cases}$$

将（2），（3），（4）式代入（1）式中，得

$$X^2=2\left(Z+\frac{Y^2}{4}\right)$$

即

$$X^2-\frac{Y^2}{2}=2Z \quad \text{（双曲抛物面）}.$$

45.

证 设点 $M(x,\ y,\ z)$是满足题设条件的点，利用点到直线的距离公式和点到平面的距离公式，得

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x-p \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-p & y \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|x+p|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

即

$$\sqrt{y^2+(x-p)^2}=|x+p|$$

整理得

$$y^2=4px \qquad (*)$$

由于方程（$*$）表示母线平行于 Oz 轴的抛物柱面，因而满足题设条件的动点轨迹是一抛物柱面。

46.

解 将直线方程分别化为标准式

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{0}$$

与

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$$

若设球心坐标为 $C(X,\ Y,\ Z)$，则由点到直线的距离公式得

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z-1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z-1 & X \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X & Y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z+1 & X \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X & Y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}$$

即

$$\sqrt{(Z-1)^2+Y^2}=\sqrt{(Z+1)^2+X^2}$$

整理得

$$X^2-Y^2=-4Z$$

由此可知，动点轨迹是一双曲抛物面。

47.

解 将已知直线化为参数式

$$x=0,\quad y=0,\quad z=t$$

与

$$x=1,\quad y=t,\quad z=0$$

设动直线方程为

$$x=X+lt,\quad y=Y+mt,\quad z=Z+nt$$

因为动直线与 p 共面，所以

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

因为动直线与 q 也共面，所以

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ l & m & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

展开后，整理得

$$mX-lY=0 \qquad (1)$$

$$lZ-n(X-1)=0 \qquad (2)$$

又因动直线与已知平面平行，则

$$l+m+n=0$$

由于 l，m，n 为动直线的方向向量，则方程组（1），（2），（3）关于 l，m，n 应有非零解，从面

$$\begin{vmatrix} -Y & X & 0 \\ Z & 0 & -(X-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

整理得

$$X^2+XZ+XY-X-Y=0.$$

48.

解 （1）因为准线是 Oyz 坐标面上的抛物线，母线平行于 Ox 轴。所以是抛物柱面，其方程为

$$Y^2=2Z.$$

（2） 将 $y=3$ 代入方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$$

得

$$\frac{x^2}{4}-z^2=0$$

则所求柱面方程为

$$X^2-4Z^2=0.$$

（3） 将 $z=2$ 代入方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$$

得

$$9x^2+4y^2=20$$

则所求柱面方程为

$$9X^2+4Y^2=20.$$

49.

解 设过点 $M(X, Y, Z)$的母线方程为

$$x=X+t,\quad y=Y+t,\quad z=Z+t$$

代入准线方程中，得

$$(X+t)^2+(Y+t)^2+(Z+t)^2=1 \tag{1}$$

$$(X+t)+(Y+t)+(Z+t)=0 \tag{2}$$

由（2）式得

$$t=-\frac{1}{3}(X+Y+Z)$$

代入（1）式，并整理得

$$X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ-\frac{3}{2}=0.$$

50.

解法一 先求柱面的准线方程. 因为柱面与球面切于一圆，此圆所在的平面与柱面母线垂直. 且通过球心，则其方程为

$$(x-0)+0(y-0)+(z-0)=0$$

或

$$x+z=0$$

从而柱面的准线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

设柱面上过点 $M(X, Y, Z)$ 的母线方程为

$$x=X+t, \qquad y=Y \qquad z=Z+t$$

代入准线方程中，得

$$\begin{cases} (X+t)^2+Y^2+(Z+t)^2=1 & (1) \\ (X+t)+(Z+t)=0 & (2) \end{cases}$$

由（2）式解得

$$t=-\frac{1}{2}(X+Z)$$

代入（1）式中，整理得

$$(X-Z)^2+2Y^2-2=0.$$

解法二 设过点 $M(X, Y, Z)$ 的母线方程为

$$x=X+t, \quad y=Y, \quad z=Z+t$$

代入球面方程中，得

$$(X+t)^2+Y^2+(Z+t)^2=1$$

或

$$2t^2+2(X+Z)t+X^2+Y^2+Z^2-1=0$$

因为母线与球面相切，所以上式关于 t 有唯一解，于是

$$(X+Z)^2-2(X^2+Y^2+Z^2-1)=0$$

整理得

$$X^2+2Y^2+Z^2-2XZ-2=0.$$

51.

解　设点 $M(X, Y, Z)$ 为圆柱面上任一点，于是点 M 到轴线的距离等于 r，即

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y-2 & Z \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z & X-1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X-1 & Y-2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = 2$$

将上式整理得

$$4X^2 + 5Y^2 + Z^2 - 4XZ - 8X - 20Y + 4Z + 4 = 0.$$

52.

解　设过点 $M(X, Y, Z)$的母线方程为

$$x = X + t, \qquad y = Y + t, \qquad z = Z + t$$

代入椭圆面方程，得

$$(X+t)^2 + 4(Y+t)^2 + 4(Z+t)^2 = 1$$

或

$$9t^2 + 2(X + 4Y + 4Z)t + X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 - 1 = 0$$

因为母线与椭圆面相切，所以上式关于 t 有唯一解，从而有

$$(X + 4Y + 4Z)^2 - 9(X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 - 1) = 0$$

整理得

$$2X^2 + 5Y^2 + 5Z^2 - 2XY - 2XZ - 8YZ + \frac{9}{4} = 0.$$

53.

解　将三已知直线方程化为标准式

$$\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1},$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

及

$$\frac{x-\sqrt{2}}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

因为三直线平行，所以在直线 p_1 上取一点 $M_1(0, 1, -1)$可作三直线的垂面 π（图49），其方程为

$$y + z = 0$$

由方程组

$$\left.\begin{array}{r}x=0\\x+y-z=-2\\y+z=0\end{array}\right\}$$

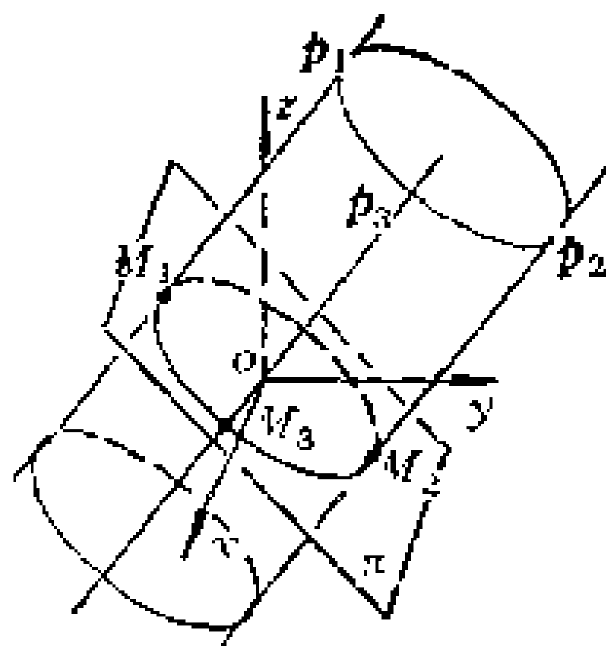


图 49

及

$$\left.\begin{array}{r}x=\sqrt{2}\\y-z=0\\y+z=0\end{array}\right\}$$

求得垂面 π 与 p_2、p_3 的交点坐标为 $M_2(0,-1,1)$，$M_3(\sqrt{2},0,0)$.

设平面 $y+z=0$ 上的圆心坐标为 $C(x,y,z)$，则

$$|CM_1|=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

$$|CM_2|=\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$$

$$|CM_3|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

因为在垂面 π 上，三点 M_1，M_2 及 M_3 确定一个圆，所以，由方程组

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}\\=\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\\\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}\\=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-0)^2+(z-0)^2}\\\qquad\qquad y+z=0\end{array}\right\}$$

解得圆心坐标为 $C(0,0,0)$，于是圆柱面的轴线方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

而半径

$$r=|CM_3|=\sqrt{(\sqrt{2}-0)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{2}$$

因圆柱面上任意点 $M(X,\ Y,\ Z)$ 到轴线的距离都等于半径 r，所以由点到直线的距离公式得

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z & X \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \sqrt{2}$$

整理得

$$2X^2+Y^2+Z^2-2YZ-2=0.$$

54.

解 设锥面上的母线方程为

$$x=Xt, \qquad y=Yt, \qquad z=Zt$$

代入准线方程中，得

$$(Xt)^2+(Yt)^2=3 \tag{1}$$

$$(Xt)^2+(Yt)^2+(Zt)^2=25 \tag{2}$$

由（2）式减（1）式得

$$t^2=\frac{22}{Z^2}$$

再代入（1）式中并整理得

$$22X^2+22Y^2-3Z^2=0.$$

55.

解法一 先求锥面的准线方程．因为直线通过点 $M_0(0, 2, 4)$，所以当直线旋转时，此点形成一个圆，其方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=4 \end{cases}$$

由于直线通过坐标原点，因此它旋转到任意位置时的方程为

$$x=Xt, \qquad y=Yt, \qquad z=Zt$$

其中 X、Y、Z 是直线上任一点的坐标．将上式代入圆的方程（即准线方程）中，得

$$(Xt)^2+(Yt)^2=4 \tag{*}$$

由

$$z=Zt=4$$

得

$$t=\frac{4}{Z}$$

代入(*)式中，得

$$\left(\frac{4X}{Z}\right)^2+\left(\frac{4Y}{Z}\right)^2=4$$

或整理为

$$4X^2+4Y^2-Z^2=0$$

解法二 因为直线绕 Oz 轴旋转，则

$$z=Z, \qquad |y|=\sqrt{X^2+Y^2}$$

但由直线方程得

$$y=\frac{z}{2}$$

于是

$$|y|=\frac{|z|}{2}=\frac{|Z|}{2}=\sqrt{X^2+Y^2}$$

从而有

$$\frac{Z^2}{4}=X^2+Y^2$$

即

$$4X^2+4Y^2-Z^2=0.$$

56.

证 设点 $M(X, Y, Z)$为锥面上任一点，点 $P(x, y, h)$为通过点M的母线与准线的交点（图50）．于是母线方程为

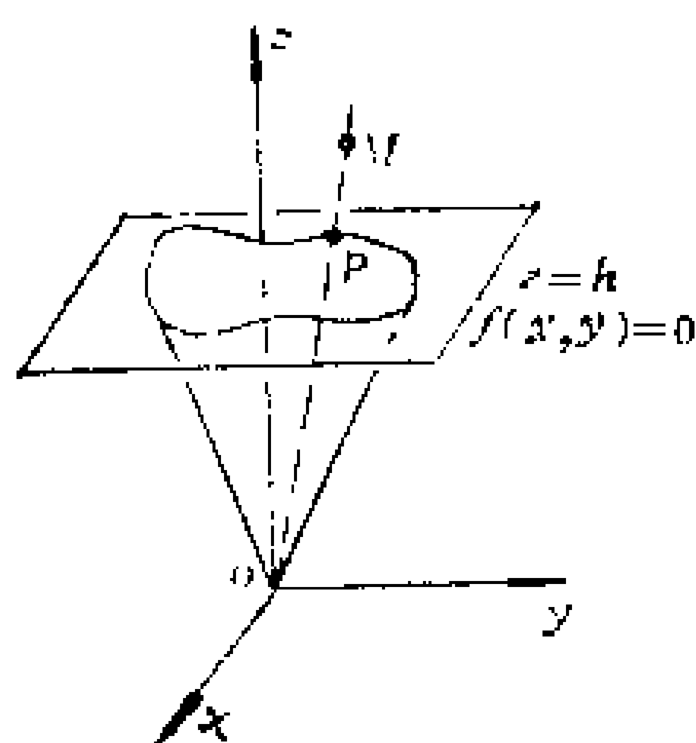


图 50

$$\left.\begin{aligned} x&=Xt\\ y&=Yt\\ z&=Zt \end{aligned}\right\}$$

由第三个等式解得

$$t=\frac{h}{Z}$$

代入前两个等式中，得

$$x=\frac{hX}{Z}, \quad y=\frac{hY}{Z}$$

因为坐标 x、y 满足方程

$$f(x, y)=0$$

代入得

$$f\left(\frac{hX}{Z}, \frac{hY}{Z}\right)=0$$

即顶点在坐标原点，准线为 $\begin{cases} f(x, y)=0 \\ z=h \end{cases}$ 的锥面方程为 $f\left(\frac{hX}{Z}, \frac{hY}{Z}\right)=0$。

57.

证 设点 $M(x, y, z)$，$P(X, Y, Z)$ 为直线上任意两点（但不是坐标原点），则直线方程为

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$$

由直线和平面的夹角公式得

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

或

$$2Z=\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

将上式两端平方并整理得

$$X^2+Y^2-Z^2=0$$

因为上式表示一锥面，且各项系数的绝对值都等于1，所以是等轴锥面。

58.

解 设平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

因为平面通过已知两点，所以

$$-2A+D=0 \quad (1)$$

$$-2B+D=0 \quad (2)$$

另一方面，由圆锥截线的性质，截锥面于抛物线的平面与

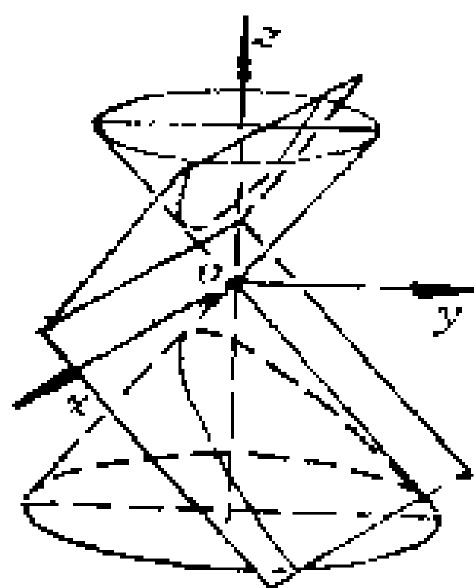


图 51

锥面的母线平行，而已知锥面是等轴的，即锥面上任一条母线与 Oxy 坐标面都构成定角$\frac{\pi}{4}$，则所求平面与 Oxy 坐标面也构成定角$\frac{\pi}{4}$，于是由两个平面夹角公式得

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理为

$$A^2+B^2-C^2=0 \qquad (3)$$

由（1），（2），（3）式解得

$$A=\frac{1}{2}D,\quad B=\frac{1}{2}D,\quad C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}D$$

于是所求平面方程为

$$x+y+\sqrt{2}z+2=0$$

与

$$x+y-\sqrt{2}z+2=0.$$

59.

解 设经过锥面上点 $M(X,\ Y,\ Z)$的母线方程为

$$\frac{x-1}{X-1}=\frac{y-1}{Y-1}=\frac{z-1}{Z-1}$$

或写成参数形式

$$x=1+(X-1)t$$
$$y=1+(Y-1)t$$
$$z=1+(Z-1)t$$

代入准线方程中，得

$$[1+(X-1)t]^2+[1+(Y-1)t]^2=1 \qquad (1)$$

$$1+(X-1)t+1+(Y-1)t+1+(Z-1)t=0 \qquad (2)$$

由（2）式得

$$t=-\frac{3}{X+Y+Z-3}$$

代入（1）式中，整理得

$$4X^2-4Y^2+Z^2-10XY-4YZ-4YZ+6X+6Y$$
$$+6Z-9=0.$$

60.

解 将曲面方程化为

$$(x+z)(x-z)=(1+y)(1-y)$$

则直母线族方程为

$$\begin{cases} x+z=k(1+y) \\ k(x-z)=1-y \end{cases} \qquad (1)$$

和

$$\begin{cases} x-z=h(1-y) \\ h(x+z)=1-y \end{cases} \qquad (2)$$

由于点M的坐标满足单叶双曲面方程，于是将点M的坐标代入（1），（2）式中，求得

$$k=1, \qquad h=0.$$

把k，h分别代入（1），（2）式中，得到两条直母线方程为

$$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x-z=0 \\ y-1=0. \end{cases}$$

61.

解 将双曲抛物面方程化为

$$(2x+z)(2x-z)=y$$

则直母线族方程为

$$\begin{cases} 2x+z=ky \\ k(2x-z)=1 \end{cases} \qquad (1)$$

和

$$\begin{cases} 2x-z=hy \\ h(2x+z)=1 \end{cases} \qquad (2)$$

由于点M的坐标满足双曲抛物面方程，于是将点M的坐标代入

（1），（2）式中，求得

$$k=\frac{1}{3},\qquad h=1.$$

把 k 和 h 分别代入（1），（2）式中，得到直母线方程为

$$\begin{cases}6x-y+3z=0\\ 2x-z-3=0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}2x-y-z=0\\ 2x+z-1=0.\end{cases}$$

62.

解　由直母线的第一个方程解得

$$k=\frac{x+2z}{1-y}$$

代入第二个方程，得

$$\frac{x+2z}{1-y}(x-2z)+y+1=0$$

整理得

$$-x^2+y^2+4z^2=1.$$

63.

解　将双曲抛物面方程化为

$$(x+y)(x-y)=2z$$

则两组直母线方程为

$$\begin{cases}x-y=2k\\ k(x+y)=z\end{cases}\qquad(1)$$

和

$$\begin{cases}x+y=2h\\ h(x-y)=z\end{cases}\qquad(2)$$

而直母线（1）的方向向量为

$$\vec{a}_1=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 0\\ k & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & k\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ k & k\end{vmatrix}\right\}=\{1,\ 1,2k\}$$

因为所求直母线与已知平面平行，所以，由

$$\vec{a}_1\vec{n}=1\times1+1\times1+1\times2k=0$$

解得

$$k=-1$$

将 k 值代入（1）式中，得到一直母线方程为

$$\begin{cases}x-y+2=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

同理，直母线（2）的方向向量为

$$\vec{a_2}=\left\{\begin{vmatrix}1 & 0\\-h & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & h\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\h & -h\end{vmatrix}\right\}=\{-1,\ 1,\ -2h\}$$

则由

$$\vec{a_2}\,\vec{n}=-1\times1+1\times1-2h\times1=0$$

解得

$$h=0$$

将 h 值代入（2）式中，得到另一直母线方程为

$$\begin{cases}x+y=0\\\quad z=0.\end{cases}$$

64.

证 将直线方程化为参数式

$$\left.\begin{aligned}x&=2t\\y&=3\sqrt{2}t+3\\z&=t+\sqrt{2}\end{aligned}\right\}$$

代入单叶双曲面方程的左端，得

$$\frac{(2t)^2}{4}-\frac{(3\sqrt{2}t+3)^2}{9}+(t+\sqrt{2})^2$$

$$=t^2-(2t^2+2\sqrt{2}t+1)+(t^2+2\sqrt{2}t+2)$$

$$=1$$

即对任意的 t，上式都成立，因而直线上任一点的坐标都满足单叶双曲面方程，所以直线在单叶双曲面上。

65.

解法一 将直纹面方程化为

$$(x+y+z)(2x+y-z)=6z$$

则其直母线族方程为

$$\begin{cases} k(x+y+z)=6z \\ 2x+y-z=k \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} h(2x+y-z)=6z \\ x+y+z=h \end{cases} \tag{2}$$

容易验证，点M在已知直纹面上，于是将点M的坐标分别代入（1），（2）式中，求得

$$k=2, \qquad h=3.$$

再把 k，h 分别代入（1），（2）式中，即得两条直母线方程

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x+y+z-3=0. \end{cases}$$

解法二 设直母线方程为

$$\left.\begin{aligned} x&=1+lt \\ y&=1+mt \\ z&=1+nt \end{aligned}\right\}$$

代入直纹面方程，得

$$2(1+lt)^2+(1+mt)^2-(1+nt)^2+3(1+lt)(1+mt)+(1+lt)(1+nt)-6(1+nt)=0$$

整理得

$$(2l^2+m^2-n^2+3lm+ln)t^2+(8l+5m-7n)t=0$$

若直母线在曲面上，则上式关于 t 应有任意解，从而

$$\left.\begin{aligned} 2l^2+m^2-n^2+3lm+ln=0 \\ 8l+5m-7n=0 \end{aligned}\right\}$$

解得

$$l:m:n=1:-3:-1$$

和

$$l:m:n=4:-5:1$$

于是，所求直母线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-1}$$

和

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-1}{1}.$$

66．

证　设双曲抛物面的两组直母线为

$$\begin{cases} k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2z \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=k \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} h\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2z \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=h. \end{cases} \tag{2}$$

或整理为

$$\begin{cases} bkx+aky-2abz=0 \\ bx-ay-abk=0 \end{cases} \tag{1'}$$

与

$$\begin{cases} bhx-ahy-2abz=0 \\ bx+ay-abh=0. \end{cases} \tag{2'}$$

由（1′）式及（2′）式分别求得二直母线的方向向量为

$$\vec{a}_1=\{-a,\ -b,\ -k\}$$

$$\vec{a}_2=\{a,\ -b,\ h\}$$

若二直母线垂直，则

$$\vec{a}_1\vec{a}_2=-a^2+b^2-kh=0 \tag{3}$$

由（1′），（2′）式并利用（3）式求得二直母线的交点坐标为

$$x=\frac{a}{2}(k+h),\quad y=\frac{b}{2}(h-k),\quad z=\frac{b^2-a^2}{2}$$

于是有

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{4}(k+h)^2-\frac{1}{4}(h-k)^2=kh$$

利用第（3）式，并整理得

$$\frac{x^2}{a^2(b^2-a^2)}-\frac{y^2}{b^2(b^2-a^2)}=1$$

由此可知，互相垂直的二直母线交点在一双曲线上，其方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2(b^2-a^2)}-\dfrac{y^2}{b^2(b^2-a^2)}=1\\ z=\dfrac{b^2-a^2}{2}.\end{cases}$$

67.

证　设单叶双曲面的直母线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=k\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b}\end{cases}\qquad(1)$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=h\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ h\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b}\end{cases}\qquad(2)$$

或整理为

$$\begin{cases}bcx-acky-abz=abck\\ bckx+acy+abkz=abc\end{cases}\qquad(1')$$

与

$$\begin{cases}bcx-achy+abz=abch\\ bchx+acy-abhz=abc.\end{cases}\qquad(2')$$

由(1′)式与(2′)式分别求得直母线的方向向量为

$$\vec{a}_1=\{a(1-k^2),\ -2bk,\ c(1+k^2)\}$$
$$\vec{a}_2=\{a(h^2-1),\ 2bh,\ c(1+h^2)\}$$

在直母线（1）和（2）中各取一点（为了便于计算，都在 Oxy 坐标面上取）$M_1\left(\frac{2ak}{1+k^2},\ \frac{b(1-k^2)}{1+k^2},\ 0\right)$，$M_2\left(\frac{2ah}{1+h^2},\ \frac{b(1-h^2)}{1+h^2},\ 0\right)$，利用二直线的共面条件

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2a\left(\frac{k}{1+k^2}-\frac{h}{1+h^2}\right) & b\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}-\frac{1-h^2}{1+h^2}\right) & 0 \\ a(1-k^2) & -2bk & c(1+k^2) \\ a(h^2-1) & 2bh & c(1+h^2) \end{vmatrix}$$

$$=2abc\begin{vmatrix} \frac{k}{1+k^2}-\frac{h}{1+h^2} & \frac{1-k^2}{1+k^2}-\frac{1-h^2}{1+h^2} & 0 \\ 1 & -2k & 1+k^2 \\ h^2 & 2h & 1+h^2 \end{vmatrix}$$

$$=2abc\left\{\left(\frac{k}{1+k^2}-\frac{h}{1+h^2}\right)\left[-2k(1+h^2)-2h(1+k^2)\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}-\frac{1-h^2}{1+h^2}\right)\left[(1+k^2)h^2-(1+h^2)\right]\right\}$$

$$=2abc\left[\frac{2(1+k^2)^2h^2-2(1-h^2)^2k^2+2(h^2-k^2)(k^2h^2-1)}{(1+h^2)(1+k^2)}\right]$$

$$=0$$

即 $\Delta=0$，因此由（1）式和（2）式确定的二异组直母线共面。

68.

证　设双曲抛物面的一组直母线为

$$\begin{cases} k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=k \end{cases}\qquad (1)$$

整理后，为

$$\begin{cases} bkx + aky - 2abz = 0 \\ bx - ay - abk = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在直母线组（2）中，任取两条直母线，它们的方向向量为 $\vec{a_1} = \{-a, -b, -k_1\}$，$\vec{a_2} = \{-a, -b, -k_2\}$。并在这两条直母线上各取一点为 $M_1\left(ak_1, 0, \frac{k_1^2}{2}\right)$，$M_2\left(ak_2, 0, \frac{k_2^2}{2}\right)$ $(k_1 \neq k_2)$。由共面条件，有

$$\begin{vmatrix} a(k_2 - k_1) & 0 & \frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2) \\ -a & -b & -k_1 \\ -a & -b & -k_2 \end{vmatrix} = ab(k_2 - k_1)^2 \neq 0$$

所以同组两条直母线不共面。

第五章　二次曲面的一般理论习题解答

1.

解　将已知点的坐标分别代入坐标平移变换公式中，得

$$4=x'-1,\quad 6=y'+2,\quad 1=z'+3.$$

$$2=x'-1,\quad 3=y'+2,\quad -2=z'+3.$$

$$-2=x'-1,\quad 3=y'+2,\quad 4=z'+3.$$

从而求得各点的新坐标为

$$A'(5,4,-2),\quad B'(3,1,-5),\quad C'(-1,1,1).$$

2.

解　设平移变换公式为

$$\left.\begin{aligned}x&=x'+x_0\\y&=y'+y_0\\z&=z'+z_0\end{aligned}\right\}$$

代入点M的旧、新坐标，得

$$2=0+x_0,\quad 3=1+y_0,\quad 1=2+z_0$$

或

$$x_0=2,\quad y_0=2,\quad z_0=-1.$$

则平移变换公式为

$$\left.\begin{aligned}x&=x'+2\\y&=y'+2\\z&=z'-1\end{aligned}\right\}.$$

3.

解　（1）依题意坐标平移变换公式为

$$x=x'+3,\quad y=y'+1,\quad z=z'-2.$$

则旧坐标原点的新坐标为$O(-3,-1,2)$。

（2）将点A的坐标代入平移变换公式中，得

$$4=x'+3,\quad 2=y'+1,\quad 0=z'-2.$$

或

$$x'=1,\quad y'=1,\quad z'=2.$$

即新坐标为$A'(1,1,2)$。

（3）因为点A关于坐标原点的对称点坐标为$(-4,-2,0)$，将其代入坐标变换公式中，得

$$-4=x'+3,\quad -2=y'+1,\quad 0=z'-2$$

或

$$x'=-7,\quad y'=-3,\quad z'=2$$

即点A的对称点的新坐标为$(-7,-3,2)$。

4．

解 设平移变换公式为

$$\left.\begin{array}{l} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \\ z=z'+z_0 \end{array}\right\}$$

依题意

$$\begin{array}{lll} -1=x'+x_0, & 2=y'+y_0, & 3=0+z_0 \\ 3=0+x_0, & 1=y'+y_0, & 2=z'+z_0 \\ 4=x'+x_0, & 0=0+y_0, & 1=z'+z_0 \end{array}$$

从而得

$$x_0=3,\quad y_0=0,\quad z_0=3$$

则坐标平移变换公式为

$$\left.\begin{array}{l} x=x'+3 \\ y=y' \\ z=z'+3 \end{array}\right\}.$$

5．

解 依题意，平移变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + 1 \\ y &= y' + 2 \\ z &= z' + 3 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

将此变换公式代入方程（1）中，得

$$3(x'+1) - 5(y'+2) + 6(z'+3) - 1$$
$$= 3x' - 5y' + 6z' + 10$$

于是（1）式变换为

$$3x' - 5y' + 6z' + 10 = 0.$$

将变换公式（*）代入方程（2）中，

$$\frac{x' - 1 + 1}{3} = \frac{y' + 2 - 2}{4} = \frac{z' + 3 - 3}{2}$$

于是（2）式变换为

$$\frac{x'}{3} = \frac{y'}{4} = \frac{z'}{2}$$

同理，方程（3）变换为

$$(x'+1)^2 + (y'+2)^2 + (z'+3)^2 + (x'+1)(y'+2)$$
$$+ (x'+1)(z'-3) + (y'+2)(z'+3) - 7(x'+1) - 8(y'+2)$$
$$-9(z'+3) - 19 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x'y' + x'z' + y'z' - 6$$

即

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + x'y' + x'z' + y'z' - 6 = 0.$$

6.

证　设平移变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \\ z &= z' + z_0 \end{aligned}\right\}$$

设点 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) 的新坐标为 (x_1', y_1', z_1') 与 (x_2', y_2', z_2')，则

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_0 \\ y_1 &= y_1' + y_0 \\ z_1 &= z_1' + z_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_2' + x_0 \\ y_2 = y_2' + y_0 \\ z_2 = z_2' + z_0 \end{array}\right\}$$

于是

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \\ =&\sqrt{[(x_2'+x_0)-(x_1'+x_0)]^2+[(y_2'+y_0)-(y_1'+y_0)]^2} \\ &\overline{+[(z_2'+z_0)-(z_1'+z_0)]^2} \\ =&\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \\ =&\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}. \end{aligned}$$

7.

解 依题意旋转变换公式为

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ y = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ z = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' \end{array}\right\} \quad (1)$$

或

$$\left.\begin{array}{l} x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{array}\right\} \quad (2)$$

将点 P 的坐标代入（2）式中

$$x' = -\frac{1}{3}\times(-1) + \frac{2}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times 0 = 1$$

$$y' = \frac{2}{3}\times(-1) - \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times 0 = -1$$

$$z' = \frac{2}{3}\times(-1) + \frac{2}{3}\times 1 - \frac{1}{3}\times 0 = 0$$

即点 P 在新坐标系下的坐标为 $P'(1,-1,0)$。

8.

解 因为

$$\vec{e_1}\vec{e_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0+\frac{1}{\sqrt{6}}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{2}{6}=0$$

$$\vec{e_1}\vec{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=0$$

$$\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=0$$

$$\vec{e_1}^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$$

$$\vec{e_2}^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+0^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}=1$$

$$\vec{e_3}^2=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$=1$$

$$\vec{e_1}\,\vec{e_2}\,\vec{e_3}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{vmatrix}=1$$

即三向量两两正交，又都是单位向量，且满足右旋系，所以可作为新坐标系的三个轴上的三个单位向量。

9.

解 取二直线方向向量的单位向量

$$\vec{e}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ \vec{e}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

$$\vec{e}_3=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

由于

$$(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=-1$$

则可取$\vec{e}_3=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

从而坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y&=\frac{1}{\sqrt{3}}x'-\frac{2}{\sqrt{6}}y' \\ z&=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z \\ y'&=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z \\ z'&=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z \end{aligned}\right\}.$$

10.

证　设任一旋转变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3 \\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3 \\ z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}$$

则

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)^2 \\
&= x'^2\cos^2\alpha_1 + y'^2\cos^2\alpha_2 + z'^2\cos^2\alpha_3 + 2(x'y'\cos\alpha_1\cos\alpha_2 \\
&\quad + x'z'\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + y'z'\cos\alpha_2\cos\alpha_3) \\
y^2 &= (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)^2 \\
&= x'^2\cos^2\beta_1 + y'^2\cos^2\beta_2 + z'^2\cos^2\beta_3 + 2(x'y'\cos\beta_1\cos\beta_2 \\
&\quad + x'z'\cos\beta_1\cos\beta_3 + y'z'\cos\beta_2\cos\beta_3) \\
z^2 &= (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)^2 \\
&= x'^2\cos^2\gamma_1 + y'^2\cos^2\gamma_2 + z'^2\cos^2\gamma_3 + 2(x'y'\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\
&\quad + x'z'\cos\gamma_1\cos\gamma_3 + y'z'\cos\gamma_2\cos\gamma_3)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 = {} & (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)x'^2 + (\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 \\
& + \cos^2\gamma_2)y'^2 + (\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3)z'^2 \\
& + 2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)x'y' \\
& + 2(\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3)x'z' \\
& + 2(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3)y'z'
\end{aligned}
$$

由于

$$
\cos\alpha_i\cos\alpha_j + \cos\beta_i\cos\beta_j + \cos\gamma_i\cos\gamma_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}
$$

代入上式得

$$
x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.
$$

11.

解 依题意，坐标变换公式为

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\
y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\
z &= z'
\end{aligned}
\right\}
$$

将变换公式代入方程，得

$$
\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)
$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2+2z'^2$$

$$-8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)-\frac{5}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2+2z'^2-4\sqrt{2}x'$$

$$+4\sqrt{2}y'=0$$

即变换后的方程为

$$5x'^2-y'^2+4z'^2-8\sqrt{2}x'+8\sqrt{2}y'=0.$$

12.

解 ∵ $x^2-y^2-z^2+2yz+2x-8z$

$$=x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2+2x-8z$$

令

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\\ y'&=\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}z\\ z'&=\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z \end{aligned}\right\}$$

代入上式得

$$x'^2-\frac{1}{2}y'^2+2x'-8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)=0$$

即

$$x'^2-\frac{1}{2}y'^2+2x'-4\sqrt{2}y'-4\sqrt{2}z'=0.$$

13.

解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=\{15,\ -8,\ 0\}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{15^2+(-8)^2+0^2}$

$=\sqrt{289}=17$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{1,\ 4,\ -3\}$

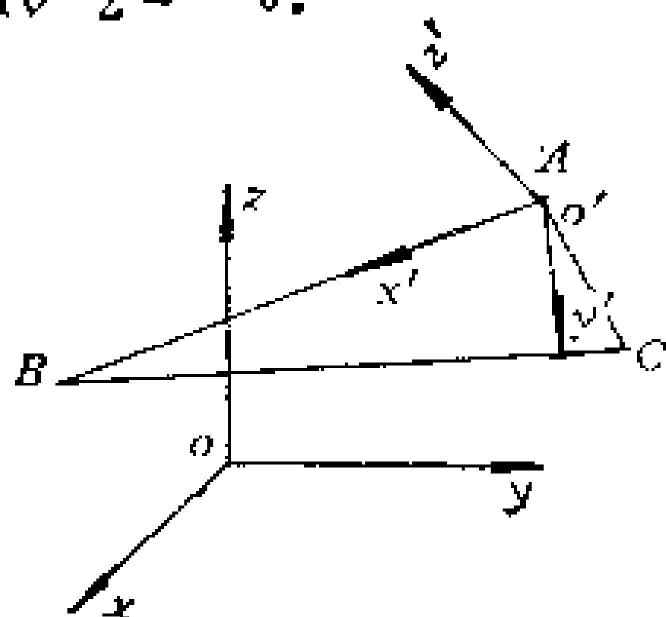


图 52

依题意（图52）

$$\vec{i'}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left\{\frac{15}{17},\ \frac{-8}{17},0\right\}$$

因为三角形在$O'x'y'$面上，则$\vec{k'}$与$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$方向相同，而

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left\{\begin{vmatrix}-8 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & 15\\ -3 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}15 & -8\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{24,45,68\}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+45^2+68^2}=\sqrt{7225}=85$$

则

$$\vec{k'}=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\left\{\frac{24}{85},\ \frac{9}{17},\ \frac{4}{5}\right\}$$

而 $$\vec{j'}=\vec{k'}\times\vec{i'}=\left\{\frac{32}{85},\ \frac{12}{17},\ -\frac{3}{5}\right\}$$

即

$$\vec{i'}=\left\{\frac{15}{17},\ -\frac{8}{17},0\right\}$$

$$\vec{j'}=\left\{\frac{32}{85},\ \frac{12}{17},\ -\frac{3}{5}\right\}$$

$$\vec{k'}=\left\{\frac{24}{85},\ \frac{9}{17},\ \frac{4}{5}\right\}$$

又因点A为新的坐标原点，则其坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{15}{17}x'+\frac{32}{85}y'+\frac{24}{85}z'-10\\ y&=-\frac{8}{17}x'+\frac{12}{17}y'+\frac{9}{17}z'+5\\ z&=-\frac{3}{5}y'+\frac{4}{5}z'+4\end{aligned}\right\}.$$

14.

解　$\because\ 2x+y+2z+5=2(x+1)+(y+1)+2(z+1)=0$

令

$$\left.\begin{array}{l} x=x''-1 \\ y=y''-1 \\ z=z''-1 \end{array}\right\}$$

则原方程变换为

$$2x''+y''+2z''=0 \qquad (*)$$

由于平面 $x'=0$ 的法向量是 $\vec{i'}$（图53），因而可取（＊）式的单位法向量 $\vec{n}^{\circ}$ 作为 $O'x'$ 轴的方向。

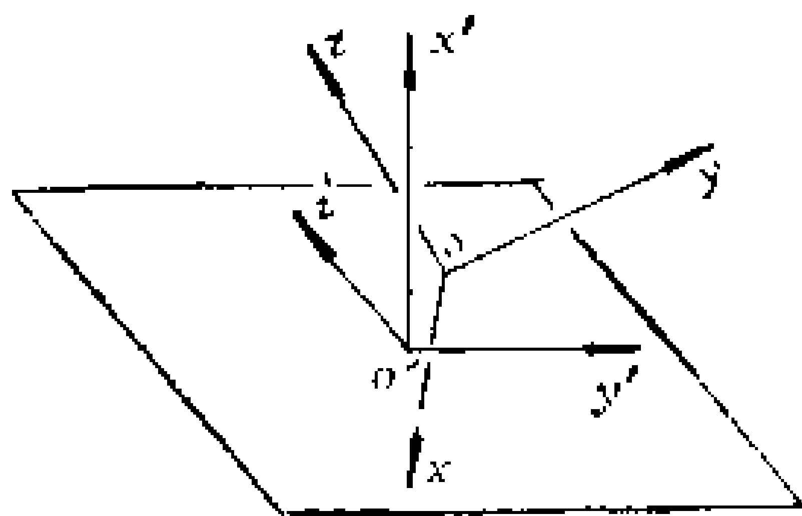


图 53

即 $\vec{i'}=\vec{n}^{\circ}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

$$=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$$

而 $\vec{j'}$ 只须取垂直于 $\vec{i'}$ 的任意单位向量即可。为了简便，取

$$\vec{j'}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

而 $\vec{k'}=\vec{i'}\times\vec{j'}=\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{6},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right\}$

则坐标变换公式为：

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-\dfrac{\sqrt{2}}{6}z'-1 \\ y=\dfrac{1}{3}x'+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}z'-1 \\ z=\dfrac{2}{3}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-\dfrac{\sqrt{2}}{6}z'-1 \end{array}\right\}$$

容易验证，此变换公式将已知平面方程变换为

$x'=0$。

15.

解 （1）

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix} = -184 \neq 0$$

则方程（1）确定有心曲面．作中心方程组

$$\left.\begin{aligned} 4x - 2y + 6z + 7 = 0 \\ -2x + 2y + 4z - 5 = 0 \\ 6x + 4y + 12z = 0 \end{aligned}\right\}$$

解得中心坐标为$\left(-1, \dfrac{3}{2}, 0\right)$.

（2）

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

则曲面方程（2）确定无心曲面。

（3）

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

则曲面方程（3）确定有心曲面，作中心方程组

$$\left.\begin{aligned} x - 2z - 4 = 0 \\ -2y + 3z + 5 = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{aligned}\right\}$$

解得中心坐标为$\left(\dfrac{14}{3}, 3, \dfrac{1}{3}\right)$.

（4）

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

则曲面方程（4）确定无心曲面。

（5）

$$I_3=\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-14\neq 0$$

则方程（5）确定有心曲面，作中心方程组

$$\left.\begin{aligned}3x-z-2=0\\ 2y+2z=0\\ -x+2y-4=0\end{aligned}\right\}$$

解得中心坐标为$(0, 2, -2)$.

16．

解 （1）作中心方程组

$$\left.\begin{aligned}x+y-1=0\\ x+2y-2=0\\ 2z-2=0\end{aligned}\right\}$$

解得中心坐标为$(0, 1, 1)$.

由于

$$\begin{aligned}a_{44}'&=a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}\\ &=-1\times 0-2\times 1-2\times 1+0\\ &=-4\end{aligned}$$

则经过平移变换后的方程为

$$x'^2+2y'^2+2z'^2+2x'y'-4=0.$$

（2）作中心方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}=0\\ \frac{3}{2}x+y+z+1=0\\ \frac{1}{2}x+y=0\end{aligned}\right\}$$

解得中心坐标为$\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

由于 $a_{44}'=a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}+1\times\left(-\frac{2}{5}\right)+0\times\left(-\frac{9}{5}\right)+0$$

$$=\frac{4}{5}$$

则经平移变换后的方程为

$$y'^2+3x'y'+2y'z'+x'z'+\frac{4}{5}=0。$$

（3）将原方程整理为

$$(x+1)^2+2(y-1)^2-(z-1)^2-1=0$$

作平移变换

$$\left.\begin{array}{l}x=x'-1\\ y=y'+1\\ z=z'+1\end{array}\right\}$$

则方程变换为

$$x'^2+2y'^2-z'^2-1=0。$$

17.

解 由曲面和平面的交线方程知，曲面方程为

$$x^2+a_{33}z^2-4xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{34}z-1=0 \quad (1)$$

代入已知点的坐标，得

$$4+a_{33}-4a_{13}-2a_{34}-1=0$$

即

$$a_{33}-4a_{13}-2a_{34}+3=0 \quad (2)$$

再作曲面方程（1）的中心方程组

$$\left.\begin{array}{r}x-2y+a_{13}z=0\\ -2x+a_{23}z=0\\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34}=0\end{array}\right\}$$

代入曲面的中心坐标，得

$$\left.\begin{array}{r}-a_{13}=0\\ -a_{23}=0\\ -a_{33}+a_{34}=0\end{array}\right\} \quad (3)$$

联立（2），（3）式解得

$$a_{33}=3,\quad a_{13}=a_{23}=0,\quad a_{34}=3$$

代入（1）式，得

$$x^2+3z^2-4xy+6z-1=0_{\circ}$$

18.

解 将原方程配方得

$$4\left(y+\frac{a}{8}\right)^2-2\left(z-\frac{b}{4}\right)^2=-\left(x-\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{8}\right)$$

因为对任意实数a、b,上式都确定一双曲抛物面，所以原方程确定无心曲面．其顶点坐标为 $x=\frac{a^2}{16}-\frac{b^2}{8}$，$y=-\frac{a}{8}$，$z=\frac{b}{4}$，将$y,z$的值代入$x$ 中，消去a、b,得顶点的轨迹方程为

$$4y^2-2z^2=x_{\circ}$$

19.

证 因为曲面是无心的必要充分条件是 $I_3=0$,即

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}=0$$

但 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,3)$，则上式变为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}=a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2+a_{33}a_{12}^2{}_{\circ}$$

20.

解 （1）因为$I_1=1+1+1=3$

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-9$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}\quad 5$$

所以特征方程为

$$-\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5=0$$

或

$$-(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$$

于是求得其特征根为$\lambda_1=5$， $\lambda_2=\lambda_3=-1$。

（2） 因为$I_1=4+1+1=6$

$$I_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$I_3=\begin{vmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

特征方程为

$$-\lambda^3+6\lambda^2=0$$

或

$$\lambda^2(6-\lambda)=0$$

解得特征根为$\lambda_1=\lambda_2=0$， $\lambda_3=6$。

（3） 因为$I_1=1+3+3=7$

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=14$$

$$I_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=8$$

所以特征方程为

$$-\lambda^3+7\lambda^2-14\lambda+8=0$$

或

$$-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$$

解得特征根为$\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$， $\lambda_3=4$。

（4） 因为$I_1=2+5+2=9$

$$I_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=18$$

$$I_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$$

所以特征方程为

$$-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda=0$$

或

$$-\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

解得特征根为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=6$。

21.

解 （1）因为$I_1=2+2-5=-1$

$$I_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{vmatrix}=-17$$

$$I_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{vmatrix}=-15$$

所以其特征方程为

$$-\lambda^3-\lambda^2+17\lambda-15=0$$

解得

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-5$$

作方程组

$$\left.\begin{aligned}(2-\lambda)l+m=0\\ l+(2-\lambda)m=0\\ (-5-\lambda)n=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

将$\lambda_1=1$代入（1）式中，得到两个独立的方程

$$l_1+m_1=0$$
$$-6n_1=0$$

解得

$$l_1:m_1:n_1=1:-1:0$$

将$\lambda_2=3$代入（1）式中，得到两个独立的方程

$$-l_2+m_2=0$$

$$-8n_2=0$$

解得

$$l_2:m_2:n_2=1:1:0$$

将$\lambda_3=-5$代入（1）式中得到两个独立的方程

$$7l_3+m_3=0$$

$$l_3+7m_3=0$$

解得

$$l_3:m_3:n_3=0:0:1$$

则所求主方向为

$$\overrightarrow{e_1'}=\{1,\ -1,\ 0\}$$

$$\overrightarrow{e_2'}=\{1,\ 1,\ 0\}$$

$$\overrightarrow{e_3'}=\{0,\ 0,\ 1\}。$$

（2）因为$I_1=1+1+5=7$

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$I_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{vmatrix}=-36$$

所以其特征方程为

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0$$

解得

$$\lambda_1=6,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-2$$

作方程组

$$\left.\begin{aligned}(1-\lambda)l-3m-n=0\\ -3l+(1-\lambda)m+n=0\\ -l+m+(5-\lambda)n=0\end{aligned}\right\}\qquad(1')$$

将$\lambda_i(i=1、2、3)$的值分别代入(1′)式中，则分别解得

$$l_1:m_1:n_1=-1:1:2$$

$$l_2:m_2:n_2=1:-1:1$$

$$l_3 : m_3 : n_3 = 1 : 1 : 0$$

因此所求主方向为

$$\overrightarrow{e_1'} = \{-1, 1, 2\}$$

$$\overrightarrow{e_2'} = \{1, -1, 1\}$$

$$\overrightarrow{e_3'} = \{1, 1, 0\}.$$

（3） 因为$I_1 = 1 + 1 - 3 = -1$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -24$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -36$$

所以其特征方程为

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 24\lambda - 36 = 0$$

解得

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -6$$

作方程组

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)l - m - 3n = 0 \\ -l + (1-\lambda)m - 3n = 0 \\ -3l - 3m + (-3-\lambda)n = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1'')$$

将$\lambda_i (i = 1, 2, 3)$的值分别代入$(1'')$中，因而解得

$$l_1 : m_1 : n_1 = -1 : 1 : 0$$

$$l_2 : m_2 : n_2 = 1 : 1 : -1$$

$$l_3 : m_3 : n_3 = 1 : 1 : 2$$

于是所求主方向为

$$\overrightarrow{e_1'} = \{-1, 1, 0\}$$

$$\overrightarrow{e_2'} = \{1, 1, -1\}$$

$$\overrightarrow{e_3'} = \{1, 1, 2\}.$$

22．

解 因为

$$(2x+y+z)^2=6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z\right)^2$$

$$(x-y-z)^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^2$$

$$y-z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)$$

若令

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{2}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z\\ y'&=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}z\\ z'&=\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}z \end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

则因(*)式右端的系数是正交、右旋的三个单位向量的坐标，所以(*)式可作为旋转变换公式，将其代入原方程中，得

$$6x'^2-3y'^2=\sqrt{2}z'$$

于是，原方程确定一双曲抛物面．

23．

解 依题意知，所求曲面是有心曲面，若取三个对称平面作为新的坐标系中的三个坐标面，即

$$x'=x+y+z$$

$$y'=2x-y-z$$

$$z'=y-z+1$$

则曲面在新坐标系下的方程具有标准形式，可设为

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2=1$$

或

$$A(x+y+z)^2+B(2x-y-z)^2+C(y-z+1)^2=1 \qquad (*)$$

代入已知点的坐标，得方程组

$$\left.\begin{aligned} C &= 1 \\ A + 4B + 9C &= 1 \\ A + B &= 1 \end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$A = 4,\quad B = -3,\quad C = 1$$

代入(*)式中，得

$$4(x+y+z)^2 - 3(2x-y-z)^2 + (y-z+1)^2 = 1$$

或

$$8x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 20xy - 20xz - 2y + 2z - 1 = 0.$$

24．

解　依题意知，所求柱面只能是椭圆柱面或圆柱面（其它柱面不存在轴线）．若取二对称平面作为新坐标系中的两个坐标面，即令

$$x' = x - 2y + z$$

$$y' = x - z$$

则所求柱面在新坐标系中的方程为

$$Ax'^2 + By'^2 = 1$$

或

$$A(x+2y+z)^2 + B(x-z)^2 = 1 \qquad (*)$$

代入已知点的坐标，得方程组

$$\left.\begin{aligned} 4B &= 1 \\ 16A &= 1 \end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$A = \frac{1}{16},\quad B = \frac{1}{4}$$

代入(*)式中，得

$$\frac{1}{16}(x+2y+z)^2 + \frac{1}{4}(x-z)^2 = 1$$

或

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 6xz + 4yz - 16 = 0.$$

25.

解 因为Oz 轴是曲面的旋转轴，所以曲面关于 Oz 轴对称，从而曲面方程具有如下形式

$$A(x^2+y^2)+B(z-c)^2=1$$

或写成

$$A(x^2+y^2)+Bz^2+Cz+D=0$$

将已知点的坐标分别代入上式中，得方程组

$$\left.\begin{aligned} A+D=0 \\ 2A+B+C+D=0 \\ A+4B+2C+D=0 \end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$A:B:C:D=1:1:-2:-1$$

于是，所求曲面方程为

$$x^2+y^2+z^2-2z-1=0.$$

26.

证 因为直线和曲面相切的必要充分条件是直线方程与曲面方程联立有唯一解. 所以将直线方程代入曲面方程中，得

$$A(a+lt)^2+B(b+mt)^2+C(c+nt)^2+D=0$$

展开后整理为

$$(Al^2+Bm^2+Cn^2)t^2+2(Aal+Bbm+Ccn)t+(Aa^2+Bb^2+Cc^2+D)=0$$

而上式关于 t 有唯一解的必要充分条件是判别式为零，即

$$4(Aal+Bbm+Ccn)^2-4(Al^2+Bm^2+Cn^2)(Aa^2+Bb^2+Cc^2+D)=0$$

于是得到直线与曲面相切的必要充分条件是

$$(Aal+Bbm+Ccn)^2=(Al^2+Bm^2+Cn^2)(Aa^2+Bb^2+Cc^2+D).$$

27.

解 (1)作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda = 0$$

求得特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 0$$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 9$时，确定主方向的方程组为

$$\left.\begin{aligned} -4l_1 + 2m_1 - 4n_1 = 0 \\ 2l_1 - m_1 + 2n_1 = 0 \\ -4l_1 + 2m_1 - 4n_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由于方程组(a) 中只含有一个独立的方程

$$2l_1 - m_1 + 2n_1 = 0$$

于是可取其任一组解

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

即得

$$\vec{e_1}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

由于$\vec{e_2}'$的坐标也满足方程组(a)，且$\vec{e_2}'$垂直于$\vec{e_1}'$，从而$\vec{e_2}'$的坐标必须满足如下方程组

$$\left.\begin{aligned} 2l_2 - m_2 + 2n_2 = 0 \\ l_2 - n_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$l_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad m_2 = \frac{4}{3\sqrt{2}}, \quad n_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

即得

$$\vec{e_2}' = \left\{\frac{1}{3\sqrt{2}}, \ \frac{4}{3\sqrt{2}}, \ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}$$

而

$$\vec{e_3}' = \vec{e_1}' \times \vec{e_2}' = \left\{\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right\}$$

从而坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{2}{3}z' \\ y &= \frac{4}{3\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3}z' \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{2}{3}z' \end{aligned}\right\}$$

由公式

$$a'_{p4} = a_{14}l_p + a_{24}m_p + a_{34}n_p$$

求得

$$a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = 0$$

于是曲面方程化简为

$$9x'^2 + 9y'^2 - 27 = 0$$

或

$$x'^2 + y'^2 = 3.$$

（2）作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开后，得

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = 0$$

求得特征根为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$$

当$\lambda_1 = 1$时，由Δ中后两行元素构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

得到一组解

$$l_1 = 1, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = 0$$

则

$$\overrightarrow{e_1}' = \{1, 0, 0\}$$

当$\lambda_2 = 2$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

得到一组解

$$l_2 = 0, \quad m_2 = -1, \quad n_2 = -1$$

则

$$\overrightarrow{e_2}' = \left\{0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

当$\lambda_3 = 4$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

得一组解

$$l_3 = 0, \quad m_3 = -1, \quad n_3 = 1$$

则

$$\overrightarrow{e_3}' = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

由于

$$\overrightarrow{e_1}' \overrightarrow{e_2}' \overrightarrow{e_3}' = 1$$

从而坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{aligned}\right\}$$

由公式

$$a'_{p4} = a_{14}l_p + a_{24}m_p + a_{34}n_p$$

求得

$$a'_{14} = -1, \quad a'_{24} = 0, \quad a'_{34} = 0$$

则曲面方程化简为

$$x'^2+2y'^2+4z'^2-2x'-2=0$$

（3）作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 3\\ -2 & 4-\lambda & -6\\ 3 & -6 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+14\lambda^2=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=14$$

与（1）题同样方法可求得对应于三个特征根的主方向分别为

$$\vec{e_1'}=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right\}$$

$$\vec{e_2'}=\left\{-\frac{3}{\sqrt{70}},\ \frac{6}{\sqrt{70}},\ \frac{5}{\sqrt{70}}\right\}$$

$$\vec{e_3'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

由公式

$$a'_{p4}=a_{14}l_p+a_{24}m_p+a_{34}n_p$$

求得一次项的系数为

$$a'_{14}=0,\quad a'_{24}=0,\quad a'_{34}=2\sqrt{14}$$

于是曲面方程化简为

$$14z'^2+4\sqrt{14}z'+4=0$$

或 $$(\sqrt{14}z'+2)^2=0$$

坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{3}{\sqrt{70}}y'+\frac{1}{\sqrt{14}}z'\\ y&=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{6}{\sqrt{70}}y'-\frac{2}{\sqrt{14}}z'\\ z&=\frac{5}{\sqrt{70}}y'+\frac{3}{\sqrt{14}}z'\end{aligned}\right\}.$$

28.

解 （1）作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}6-\lambda & 0 & 2\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+10\lambda^2-8\lambda-64=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=4,\quad \lambda_2=8,\quad \lambda_3=-2$$

于是可求得对应于它们的主方向分别为

$$\vec{e_1}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\vec{e_2}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\vec{e_3}'=\{0,\ -1,\ 0\}$$

而一次项的系数为

$$a'_{14}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 4+0\times(-2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-4)=4\sqrt{2}$$

$$a'_{24}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 4+0\times(-2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-4)=0$$

$$a'_{34}=0\times 4-1\times(-2)+0\times(-4)=2$$

于是原方程化简为

$$4x'^2+8y'^2-2z'^2+8\sqrt{2}x'+4z'+1=0$$

再进行配方整理得

$$4(x'+\sqrt{2})^2+8y'^2-2(z'-1)^2-5=0$$

若令

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \sqrt{2} \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' + 1 \end{aligned}\right\}$$

则代入上式中，得

$$4x''^2 + 8y''^2 - 2z''^2 = 5$$

由此可知，原曲面方程确定一单叶双曲面。

（2）对于有心曲面方程，若先进行平移变换，可消去一次项的系数，然后再求出特征根就可以化为标准形式，因而不需要计算主方向。

对方程（2）作中心方程组

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + z - 2 &= 0 \\ -3x + y - z + 4 &= 0 \\ x - y + 5z - 6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

求得曲面的中心坐标为$O'(1, 0, 1)$，从而

$$\begin{aligned} a'_{44} &= a_{14}x_0 + a_{24}y_0 + a_{34}z_0 + a_{44} \\ &= -2\times 1 + 4\times 0 - 6\times 1 + 14 \\ &= 6 \end{aligned}$$

作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$

求得特征根为

$$\lambda_1 = 3,\quad \lambda_2 = 6,\quad \lambda_3 = -2$$

于是曲面方程的标准形式为

$$3x''^2 + 6y''^2 - 2z''^2 + 6 = 0$$

由此可知，原方程确定一双叶双曲面。

（3）作中心方程组

$$\left.\begin{aligned} x+2y-4z-7=0 \\ 2x-2y-2z-2=0 \\ -4x-2y+z+7=0 \end{aligned}\right\}$$

解得中心坐标为$O'(1,1,-1)$，于是

$$a'_{44}=-7\times1-2\times1+7\times(-1)+16=0$$

作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+27\lambda+54=0$$

解得特征根为

$$\lambda_1=\lambda_2=-3,\quad \lambda_3=6$$

则曲面方程的标准形式为

$$-3x''^2-3y''^2+6z''^2=0$$

或

$$x''^2+y''^2-2z''^2=0$$

由此可知，原曲面方程确定一旋转锥面。

（4）作中心方程组

$$\left.\begin{aligned} 4x-2y+2=0 \\ -2x+5y+2z+3=0 \\ 2y+6z+2=0 \end{aligned}\right\}$$

解得曲面的中心坐标为$O'(-1,-1,0)$，于是

$$a'_{44}=2\times(-1)+3\times(-1)+2\times0+7=2$$

作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+15\lambda^2-66\lambda+80=0$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 5,\quad \lambda_3 = 8$$

则曲面方程的标准形式为

$$2x''^2 + 5y''^2 + 8z''^2 + 2 = 0$$

由此可知，原曲面方程确定一虚椭圆面。

29.

解 （1）作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = 3,\quad \lambda_2 = 6,\quad \lambda_3 = 0$$

当$\lambda_1 = 3$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_1}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

当$\lambda_2 = 6$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_2}' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \frac{2}{\sqrt{6}},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

当$\lambda_3 = 0$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_3}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

因为

$$\vec{e_1}'\ \vec{e_2}'\ \vec{e_3}' = 1$$

所以，$\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$与新坐标轴的方向一致。由公式

$$a_{p4}' = a_{14}l_p + a_{24}m_p + a_{34}n_p$$

求得

$$a_{14}' = -\sqrt{3},\quad a_{24}' = -2\sqrt{6},\quad a_{34}' = 0$$

于是曲面方程化简为

$$3x'^2 + 6y'^2 - 2\sqrt{3}x' - 4\sqrt{6}y' - 1 = 0$$

再整理为

$$3\left(x' - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 6 = 0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y' &= y'' + \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ z' &= z'' \end{aligned}\right\}$$

则得标准形式

$$3x''^2 + 6y''^2 - 6 = 0$$

或

$$\frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1.$$

（2）作特征方程

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 0$$

当$\lambda_1 = 2$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_1'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$$

当$\lambda_2 = 5$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_2'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

当$\lambda_3 = 0$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_3'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right\}$$

因为

$$\overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_3'} = 1$$

所以，$\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$与新坐标轴的方向一致，由公式

$$a_{p4}' = a_{14} l_p + a_{24} m_p + a_{34} n_p$$

求得

$$a_{14}' = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad a_{24}' = 0, \quad a_{34}' = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

则曲面方程化简为

$$2x'^2 + 5y'^2 + \sqrt{6}\,x' - 5\sqrt{2}\,z' + 3 = 0$$

再配方为

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+5y'^2-5\sqrt{2}\left(z'-\frac{9}{20\sqrt{2}}\right)=0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned}x'&=x''-\frac{\sqrt{6}}{4}\\ y'&=y''\\ z'&=z''+\frac{9}{20\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}$$

则得标准形式

$$2x''^2+5y''^2=5\sqrt{2}z''.$$

（3）作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}4-\lambda & -2 & 4\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 4 & -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+9\lambda^2=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=9,\quad \lambda_2=\lambda_3=0$$

当$\lambda_1=9$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix}-5 & -2 & 4\\ -2 & -8 & -2\end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_1}'=\left\{\frac{2}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3}\right\}$$

由于$\lambda_2=\lambda_3=0$是二重根，则由$\overrightarrow{e_1}'\perp\overrightarrow{e_2}'$得

$$2l_2-m_2+2n_2=0$$

取上式的任一组解，得

$$\overrightarrow{e_2}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

而

$$\overrightarrow{e_3'}=\overrightarrow{e_1'}\times\overrightarrow{e_2'}=\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{4}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}$$

由计算一次项系数的公式求得

$$a_{14}'=0,\quad a_{24}'=-\frac{9}{\sqrt{2}},\ a_{34}'=-\frac{9}{\sqrt{2}}$$

则曲面方程化简为

$$9x'^2-9\sqrt{2}y'-9\sqrt{2}z'=0$$

或

$$x'^2-\sqrt{2}y'-\sqrt{2}z'=0 \qquad (*)$$

再绕Cx' 轴进行旋转变换，由公式

$$\left.\begin{aligned}&x'=x''\\&y'=\frac{a_{24}'y''-a_{34}'z''}{\sqrt{a_{24}'^2+a_{34}'^2}}\\&z'=\frac{a_{34}'y''+a_{24}'z''}{\sqrt{a_{24}'^2+a_{34}'^2}}\end{aligned}\right\}$$

即

$$\left.\begin{aligned}&x'=x''\\&y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(y''-z'')\\&z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(y''+z'')\end{aligned}\right\}$$

将上式代入（*）式中，就得到标准形式

$$x''^2=2y''.$$

30.

解（1）作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}0-\lambda & -4 & 4\\ -4 & 7-\lambda & 0\\ 4 & 0 & -7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+81\lambda=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=9,\quad \lambda_2=-9,\quad \lambda_3=0.$$

由于原方程中不含有一次项，即 $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$，则经旋转变换后不会产生新的一次项，从而不需要求主方向。于是原方程化简为标准形式

$$9x'^2-9y'^2=0$$

或

$$x'=\pm y'$$

由此可知，原方程确定两个相交平面。

（2）作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+2\lambda^2+8\lambda=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=4,\quad \lambda_2=-2,\quad \lambda_3=0.$$

当$\lambda_1=4$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_1}'=\{1,0,0\}$$

当$\lambda_2=-2$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_2}'=\left\{0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

当$\lambda_3=0$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_3}' = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

由于

$$\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}' = -1$$

则可取

$$\vec{e_3}' = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

由公式算得

$$a_{14}' = 0, a_{24}' = \frac{3}{\sqrt{2}}, a_{34}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是原方程化简为

$$4x'^2 - 2y'^2 + 3\sqrt{2}y' - \sqrt{2}z' + 1 = 0$$

再进行配方整理，得

$$4x'^2 - 2\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \sqrt{2}\left(z' - 13\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = 0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' \\ y' &= y'' + \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ z' &= z'' + 13\frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}\right\}$$

则原方程化简为标准形式

$$4x''^2 - 2y''^2 = \sqrt{2}z''$$

由此可知，原方程确定一双曲抛物面。

（3） 作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}0-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=0$$

当$\lambda_1=3$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\quad -\frac{2}{\sqrt{6}},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

当$\lambda_2=-1$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

得

$$\overrightarrow{e_2'}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

而

$$\overrightarrow{e_3'}=\overrightarrow{e_1'}\times\overrightarrow{e_2'}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

由公式求得一次项的系数为

$$a_{14}'=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ a_{24}'=-\frac{5}{4}\sqrt{2},\quad a_{34}'=0$$

于是曲面方程化简为

$$3x'^2-y'^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x'-\frac{5}{2}\sqrt{2}y'-5=0$$

再进行配方整理，得

$$3\left(x' - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 - \left(y' + \frac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2 - 2 = 0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' + \frac{\sqrt{6}}{12} \\ y' &= y'' - \frac{5}{4}\sqrt{2} \\ z' &= z'' \end{aligned}\right\}$$

则曲面方程化简为标准形式

$$\frac{x''^2}{\frac{2}{3}} - \frac{y''^2}{2} = 1.$$

（4） 作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3 + 11\lambda^2 = 0$$

求得特征根为

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

当$\lambda_1 = 11$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & -3 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_1'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{11}}, \ -\frac{1}{\sqrt{11}}, \ \frac{3}{\sqrt{11}}\right\}$$

由于$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$是二重根，则由$\vec{e_1'} \perp \vec{e_2'}$得

$$l_2 - m_2 + 3n_2 = 0$$

取任一组解，得

$$\vec{e_2'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0\right\}$$

而

$$\vec{e_3}' = \vec{e_1}' \times \vec{e_2}' = \left\{-\frac{3}{\sqrt{22}},\ \frac{3}{\sqrt{22}},\ \frac{2}{\sqrt{22}}\right\}$$

由公式求得一次项的系数为

$$a_{14}' = -\sqrt{11},\quad a_{24}' = 0,\quad a_{34}' = 0$$

则曲面方程化简为

$$11x'^2 - 2\sqrt{11}x' = 0$$

或

$$x'^2 - \frac{2\sqrt{11}}{11}x' = 0$$

再进行配方整理，得

$$\left(x' - \frac{\sqrt{11}}{11}\right)^2 - \frac{1}{11} = 0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' + \frac{\sqrt{11}}{11} \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' \end{aligned}\right\}$$

则曲面方程化简为标准形式

$$x'' = \pm\frac{\sqrt{11}}{11}$$

由此可知，原曲面方程确定垂直于$O'x''$轴的二平行平面。

（5）作特征方程（为了不取分数先将原方程两端乘以2）

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=0$$

当 $\lambda_1=3$ 时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_1}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\quad -\frac{2}{\sqrt{6}},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

当$\lambda_2=-1$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_2}'=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

当$\lambda_3=0$时，由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

得

$$\vec{e_3}'=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

由于

$$\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'=1$$

因而$\vec{e_1}'$，$\vec{e_2}'$，$\vec{e_3}'$与新坐标轴的方向相同．于是由公式求得

$$a_{14}'=\sqrt{6},\quad a_{24}'=-\sqrt{2},\quad a_{34}'=0$$

则曲面方程化简为

$$3x'^2-y'^2+2\sqrt{6}\,x'-2\sqrt{2}\,y'=0$$

再配方整理为

$$3\left(x'+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-(y'+\sqrt{2})^2=0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y' &= y'' - \sqrt{2} \\ z' &= z'' \end{aligned}\right\}$$

从而曲面方程化简为标准形式

$$3x''^2 - y''^2 = 0$$

由此可知，原方程确定两个相交的平面。

31.

证　先把方程化为最简形式。

作特征方程

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda = 0$$

求得特征根为

$$\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 6,\quad \lambda_3 = 0$$

对应的三个主方向为

$$\overrightarrow{e_1'} = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\overrightarrow{e_2'} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\overrightarrow{e_3'} = \left\{\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

由一次项的系数公式求得

$$a_{14}' = \sqrt{2},\quad a_{24}' = 0,\quad a_{34}' = 0$$

则原方程化简为

$$2x'^2 + 6y'^2 + 2\sqrt{2}x' + 1 = 0$$

经配方整理为

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+6y'^2=0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned}x'&=x''-\frac{\sqrt{2}}{2}\\y'&=y''\\z'&=z''\end{aligned}\right\}$$

则方程化为最简形式

$$2x''^2+6y''^2=0$$

或

$$x''^2+3y''^2=0$$

由于满足上式的点的轨迹是一条直线（$O'z''$轴），从而原方程确定一条直线。

由$\vec{e_1}'$，$\vec{e_2}'$，$\vec{e_3}'$确定的变换公式

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\\y&=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\\z&=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\end{aligned}\right\}$$

求得新坐标原点在旧坐标系中的坐标为$O'\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，而直线的方向向量与$\vec{e_3}'$共线，可取

$$\vec{a}=\{2,1,1\}$$

于是，直线方程为

$$\frac{x}{2}=\frac{y+\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}.$$

32.

解　先将方程化简，确定旋转轴。

作特征方程

$$\Delta=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & -1\\ 2 & 2-\lambda & 2\\ -1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda=0$$

求得特征根为

$$\lambda_1=\lambda_2=6,\quad \lambda_3=0$$

对应于特征根的主方向分别为

$$\overrightarrow{e_1}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\overrightarrow{e_2}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\overrightarrow{e_3}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

一次项的系数为

$$a_{14}'=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad a_{24}'=\sqrt{3},\quad a_{34}'=0$$

则方程化简为

$$6x'^2+6y'^2+\sqrt{2}x'+2\sqrt{3}y'=0$$

再配方整理为

$$6\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2+6\left(y'+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2-\frac{7}{12}=0$$

作平移变换

$$\left.\begin{aligned}x'&=x''-\frac{\sqrt{2}}{12}\\ y'&=y''-\frac{\sqrt{3}}{6}\\ z'&=z''\end{aligned}\right\}$$

于是已知曲面方程化简为标准形式

$$6x''^2+6y''^2-\frac{7}{12}=0$$

由此可知，曲面的旋转轴为$O'z''$轴，新的坐标原点在旋转后的坐标系中的坐标为 $O'\left(-\frac{\sqrt{2}}{12},\ -\frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$由坐标变换公式

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\\y&=\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\\z&=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\end{aligned}\right\}$$

求得新坐标原点在原坐标系中的坐标为$O'\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6},-\frac{1}{12}\right)$，

而轴线的方向向量$\vec{a}$与$\vec{e_3}'$共线，可取

$$\vec{a}=\{1,\ -2,\ 1\}$$

于是轴线方程为

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{1}=\frac{y+\frac{1}{6}}{-2}=\frac{z+\frac{1}{12}}{1}$$

由共面条件知，所求平面方程为

$$\begin{vmatrix}x+\frac{1}{4} & y+\frac{1}{6} & z+\frac{1}{12}\\0+\frac{1}{4} & 0+\frac{1}{6} & 0+\frac{1}{12}\\1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

展开后并整理得

$$2x-y-4z=0。$$

附　录

历　史　略　述

解析几何是自然科学和工程技术中一种最基本的数学工具。它的产生和发展，曾在数学的发展过程中起过重要的作用。

在解析几何产生之前，虽然它所使用的某些工具和研究对象已经出现，例如我国古代早已用代数方法来解决一些几何问题，古代希腊数学家已对圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）做了较系统的研究；但是，代数方法并没有与坐标法紧密结合起来，没有把代数方程中的未知量看做变量，更没有把带有两个变量的代数方程与平面曲线对应起来。而圆锥曲线的研究，也只是使用纯粹的几何方法，并没有使用代数方法。因此，代数方法的出现，圆锥曲线的研究，只不过为解析几何的产生准备了一些必要的条件，或者说，是解析几何产生的一些萌芽因素罢了。

解析几何是在17世纪资本主义生产发展的影响下，在数学科学迅速发展的基础上，由法国数学家笛卡儿(1596—1650)、费尔玛（1601—1665）等人创建的。解析几何的创建使数学从常量的研究时期，进入了变量的研究阶段，它不仅使数学有了重大进步，而且推动着微积分以及整个数学学科突飞猛进。因此，可以说，解析几何的产生是数学发展史上的一次飞跃。

解析几何在17世纪的前半期出现并不是偶然的，从14世纪以来，欧洲的资本主义生产方式以及航海、贸易等有了迅速的

发展．它不仅影响着当时的社会革命，而且迫切要求生产技术以及有关自然科学的大发展．对运动的研究已成为当时自然科学的中心问题．例如，许多科学家去研究天文气象、抛射体运动、摆的振动以及行星绕太阳的运动等．在这种情况下，科学成果不断出现．哥白尼（1473—1543）提出了日心地动学说；刻卜勒（1571—1630）发现了行星绕太阳公转的轨道是椭圆形，并且指出太阳位于椭圆的一个焦点上；伽利略（1564—1642）发现了抛出的石子和弹道的轨迹是抛物线的形状，落体所通过的路程与时间的平方成比例，还进一步研究了抛射体运动的规律．因而，有关圆锥曲线各种数据的计算就成为迫切需要的了．如果说在古代，研究圆锥曲线只作为纯粹数学研究的对象，那末到了笛卡儿的这个时代，研究圆锥曲线对天文学、力学和科学技术都有了更现实的意义。

生产和自然科学的这种发展状况是离不开数学的．因为，事物都有量和质的两个方面，量和质的对立统一是事物发展的基本规律之一．人们往往通过量的变化来认识事物质的变化．所以，许多科学和工程技术都日益广泛和深入地运用着数学这个工具，同时也给数学不断提出许多新问题．这类问题具有普遍的共同特点，就是运动．这就要求数学从运动变化的角度去研究问题．也就是研究运动过程中，物体的位置关系以及各种变化着的量的依赖关系．特别是要求把形与数结合起来研究．例如，在以落体和行星为典型的机械运动的研究中，提出两个最基本的问题：一个是已知路程求速度；另一个是已知速度求路程．在等速运动的情况下，这两个问题用初等数学就可以解决：速度＝路程÷时间；路程＝速度×时间．但是，在变速运动，也就是速度随时间变化的情况下，只用初等数学的方法就无能为力了．因为速度成了变量，初等的常量数学无法描述时间、位置、速度之间的复杂关系．这种矛盾要求数学突破研究常量的传统范围，提供能够用以描述和研究物体运动以及变化过程的新的数学概念——变量和函数，新的数学工具——变量

数学。

在17世纪的初期，虽然许多优秀的数学家了解到这种需要，并已接触了一些解析几何的观念。但其中较先认识到创建解析几何这门新的数学学科的必要性和可能性的就是笛卡儿和费尔玛。笛卡儿是解析几何的主要创建者。他在1637年，发表了他的长篇哲学著作《方法论》。在这部著作的后一部分，作为附录，以《几何学》为题的论文中，笛卡儿较全面地叙述了解析几何这个学科的思想观点和数学理论。笛卡儿的《几何学》奠定了解析几何的基础。

笛卡儿想要创造一种方法，用来解决给数学提出的一些新问题。特别是那些属于运动变化的问题。他的方法是以两个基本观点为基础：一是坐标的观点；二是把含有两个未知数的任一代数方程$F(x,y)=0$看作平面上一条曲线的观点。笛卡儿的第一个观点，坐标的引入，使平面所谓"算术化"，即把点与数组间建立一一对应关系，点的变化可用数的变化来反映。笛卡儿的第二个观点，他把$F(x,y)=0$中的x,y看成变量，x看成点的"横坐标"，与x对应的y作为点的"纵坐标"。于是，当连续变化时，对于每个x可得到完全确定的y，也就是，每一对值(x,y)都对应一个点。反之，每个点对应于它的坐标x，y。因此，在一般情况下，由方程$F(x,y)=0$就得到了组成一条曲线的点的集合。这样，对于含两个变数的代数方程$F(x,y)=0$，与之对应的是平面上完全确定的一条曲线。也就是，$F(x,y)=0$表示平面上所有其坐标满足这个方程的点的集合构成的曲线。笛卡儿的这种观点和方法，开创了一门新的数学学科——解析几何。这个新学科把曲线与方程联系起来，把形与数结合起来，把几何与代数结合起来。它能够把几何问题归结为代数问题，通过代数问题的解决，来解决几何问题。并且它成为研究解决某些运动变化问题的有利工具。解析几何的产生是建立变量数学的第一个巨大的成就。

笛卡儿在他的《几何学》和其它著作中，较详细地讨论了

解析几何的一些基本问题和应用．他用相似三角形来求按已知比分割已知线段的分点坐标；利用求梯形面积的方法来计算三角形的面积；他还研究了一次方程所表示的曲线是直线以及直线的各种位置关系；他指出了具有两个变数的二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示椭圆、双曲线或抛物线．这些都是笛卡儿在创立解析几何中最重要的成就．此外，他还研究了许多有趣的几何轨迹问题，并利用抛物线与圆的交点来求三次和四次方程的实根．

费尔玛对解析几何的创建也有很大的贡献，他得到的某些结果比笛卡儿的还要好．如费尔玛已得到了直线和二次曲线的一些方程，用普通的表示法就是：直线的方程为 $b/d=(a-x)/y$；椭圆的方程为 $a^2-x^2=ky^2$；双曲线的方程为 $a^2+x^2=ky^2$；抛物线的方程为 $x^2=ay$．费尔玛还提出一个很重要的命题，就是："凡含有两个未知数的方程，总能够确定一个轨迹，画出一条直线或曲线"．这是对他研究成果的一个概括．

解析几何的创建，最重要的一点是，在数学中引进了变数．变数的引入，成为数学发展的一个转折点，并促进了微积分的发展．恩格斯说："数学中的转折点是笛卡儿的变数"，数学本身由于研究变数而进入辩证法的领域，而且很明显，正是辩证哲学家笛卡儿使数学有了这种进步．又说，"有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，……．"笛卡儿在他的《几何学》论文中研究透镜的聚光性能时，讨论了求曲线的切线问题．费尔玛在研究一个量的极大极小值时，借助运动的观点，提出了确定切线的方法．这些都是微积分中微分计算的先导．由于笛卡儿和费尔玛在解析几何中引进了变数概念，并把描述运动的函数关系和曲线问题的研究统一起来．从而，关于求速度与求路程这类问题，就可以化为求切线和求面积的问题．于是，解决生产实践中提出的有关运动变化的一些问题，可以应用数学上求切线和求面积的一些成果．这样，由于生产和科学实践的需要，由于解析几何的产生，在长期积累的大量

数学成果的基础上，在17世纪后期，终于由牛顿(1642—1707)和莱布尼兹（1646—1716）总结、发展了前人的工作，几乎同时建立了微积分。正如恩格斯指出的，微积分“是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的”．我们现在使用的“坐标”、“横坐标”、“纵坐标”等概念就是莱布尼兹首先提出来的．解析几何与微积分的出现，使得在它们之前无法解决的问题变得易于解决了，它们从本质上改变了当时数学的面貌．解析几何与微积分的出现，实现了常量数学向变量数学的飞跃．因此，微积分的产生是建立和发展变量数学的又一个伟大的成就．

由于生产和科学实践的需要，解析几何有了广泛的应用，因而不断地发展起来．较早把解析几何推向前进的是牛顿．他在1704年，对于二次和三次曲线理论进行了较系统的研究．特别是，得到了关于“直径”的一般理论．例如，二次曲线的平行弦中点的轨迹是直线．这个结论对椭圆、双曲线、抛物线都是正确的．对于这个早已熟知了的命题，要用经典几何的方法来论证是非常困难的．然而用解析几何的方法却很容易就证明了．这也显示出解析几何的作用．

1748年，著名数学家欧拉（1707—1783）在他的《分析引论》著作中，论述并发展了解析几何．他不仅对二阶曲线进行了详细地讨论，而且还研究了高阶曲线．他讨论了坐标轴的平移和旋转，并且得出在坐标轴变换时，方程的次数不会改变．这是因为变换式是一次的，所以次数不能升高，也不能降低．同时，欧拉还在他的书中详细讨论了带两个变量的二次方程总可化成9种标准形状中的一种．也就是对平面曲线作了分类．他的论证和现在解析几何中的有关内容很相近，只是形式不同罢了．

在欧拉之后，拉格朗日（1736—1813）对解析几何的发展作出了重大贡献．他在1788年发表的著作《解析力学》中，把力、速度、加速度“算术化”了．如同笛卡儿把点“算术化”

了一样，他把力、速度、加速度表示为有向线段。有向线段沿坐标轴的分解系数或有向线段在坐标轴上的射影是一组数。这样，有向线段就可以和数组对应起来，也就是所谓“算术化”。由于数学和物理在电学的影响下，广泛地讨论和使用了有向线段的理论，因此后来就被称为向量。向量理论在物理、力学、数学和科学技术中有着广泛的重要的应用。向量理论中的代数部分，现在已成为解析几何内容的重要组成部分。

应当指出，不论笛卡儿还是牛顿，都没有涉及到空间解析几何。在18世纪的前半期，这个工作由克雷洛和拉盖尔做到了。他们把空间的点与三数组对应起来，含三个变量的方程表示曲面；每个含三个变量的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示一个平面；直线可作为两个平面的交线。含有三个变量的一般二次方程可经过坐标轴的平移和旋转化简成 17 种标准方程，它们表示根本不同的17种类型的曲面：有两种椭圆面（实的和虚的），两种双曲面（单叶的和双叶的），两种抛物面（椭圆的和双曲的），两种二阶锥面（实的和虚的）以及 9 种柱面。所有这些曲面，在力学、物理和科学技术中都有它们的用场。

解析几何从产生到现在，经过了漫长的发展道路。现代的解析几何无论是方法还是内容都已发生了很大的变化。方法更加多样，内容更加丰富和广泛。特别是具有重要意义和作用的变换、变换群以及不变量的理论已被引入解析几何。因面，仿射几何、射影几何已成为现代解析几何的组成部分。它们在研究几何图形的仿射、射影性质，在研究二次曲线和二次曲面的分类，在研究密集物质连续变换理论（如弹性理论、流体理论）以及测绘、建筑等方面都有广泛的应用。

解析几何的发展，虽然较为完善，但并不是到了尽头。作为普通解析几何的延续和推广，早已出现了代数几何这门学科。现在，作为教科书范围的解析几何，只不过是代数几何的极其初浅的一部分罢了。代数几何所研究的对象是代数方程所

表示的曲线、曲面和超曲面，这些方程不仅有一次的二次的，而且还研究高次的．代数几何不仅在实空间而且还在复空间研究几何图形的性质．在这个领域较早的一些重要成果，已在上一世纪就被数学家黎曼得出了．现在，代数几何仍然是发展着的一个学科．

汉 英 名 词 对 照

第一章　空间坐标系

坐标	coordinate
坐标系	coordinate system
直角坐标系	rectangular coordinate system
正向	positive direction
负向	negative direction
坐标轴	coordinate axis
坐标面	coordinate plane
原点	origin
横轴	axis of abscissas
纵轴	axis of ordinates
竖轴	z-axis
横坐标	abscissa
纵坐标	ordinate
竖坐标	z-coordinaste
动点	variable point
流动坐标	current coordinates
卦限	octant
左手系	left-hand system
右手系	right-hand system
极坐标	polar coordinates

极坐标系	polar coordinates system
球面坐标	spherical coordinates
极点	pole
极轴	polar axis
极角	polar angle
动径	radius vector
方位角	azimuthal angle
天顶角	zenithal angle
柱面坐标	cylindrical coordinates
柱面坐标系	cylindrical coordinates system

第二章　向量代数

向量	vector
向量代数	vector algebra
向量的模	modulus of vector
零向量	null vector
单位向量	unit vector
相等向量	equal vector
相反向量	anti-vector
自由向量	free vector
共线向量	collinear vector
共面向量	coplanar vector
线性组合	linear combination
线性相关	linearly dependent
线性无关	linearly independent
必要条件	necessary condition
充分条件	sufficient condition
射影	projective
向量的坐标	coordinate of vector
径向量	radius vector

模长	modulus
方向角	direction angles
方向余弦	direction cosine
方向数	direction numbers
数量积	scalar produt
向量积	veotor product
混合积	mixed product
二重向量积	bivector product
交换律	commutative law
结合律	associative law
分配律	distributive law

第三章　平面和直线

平面	plane
直线	straight line
平面方程	equation of plane
直线方程	equation of straight line
一般方程	general equation
向量方程	vector equation
法线	normal
法线式	normal form
截距	intercept
截距式	intercept form
距离	distance
夹角	included angle
垂直条件	condition of perpendicularity
平行条件	condition of parallelism
交点	point of intersection
矩阵	matrix
秩	rank

面束	pencil of planes
面把	bundle of planes
中心	center
有向直线	oriented line
标准方程	canonical equation
参数方程	parametic equation
公垂线	common perpendicular
异面直线	skew lines

第四章　二次曲面

曲面	surface
曲线	curve
二次曲面	quadric surface
曲面方程	equation of surface
曲线方程	equation of curve
圆柱螺线	ordinary helix
实曲面	real surface
虚曲面	imaginary surface
代数曲面	algebraic surface
超越曲面	transcendental surface
旋转曲面	surface of revolution
旋转轴	axis of revolution
母线	generating line
旋转椭圆面	ellipsoidal of revolution
单叶旋转双曲面	hyperboloid of revolution of one sheet
双叶旋转双曲面	two sheeted hyperboloid of revolution
旋转抛物面	paraboloid of revolution
伸缩变换	dilatation transformation

椭圆面	ellipsoid
单叶双曲面	hyperboloid of one sheet
双叶双曲面	hyperboloid of two sheet
椭圆抛物面	elliptic paraboloid
双曲抛物面	hyperbolic paraboloid
柱面	cylinder
锥面	cone
准线	directrix
椭圆柱面	elliptic cylinder
双曲柱面	hyperbolic cylinder
抛物柱面	parabolic cylinder
二次柱面	quadratic cylinder
二次锥面	quadratic cone
圆锥面	circular cone
截口	section
对称平面	plane of symmetry
主平面	principul plane
对称中心	center of symmetry
对称轴	axis of symmetry
直纹面	ruled surface
直母线	rectilinear generator

第五章 二次曲面的一般理论

一般二次方程	general quadratie equation
曲面中心	center of surface
有心二次曲面	central quadric
无心二次曲面	noncentral quadric
坐标变换	transformation of coordinates
平移变换	translation
旋转变换	rotation

主方向	principal direction
特征方程	characteristic equation
特征根	characteristic root
二次曲面的分类	classification of quadrics

希腊字母

大写	小写	英语读音	汉语读音
A	α	alpha	阿尔法
B	β	beta	贝塔
Γ	γ	gamma	伽马
Δ	δ	delta	德尔塔
E	ε	epsilon	伊普西隆
Z	ζ	zeta	截塔
H	η	eta	艾塔
Θ	θ	theta	西塔
I	ι	iota	约塔
K	κ	kappa	卡帕
Λ	λ	lambda	拉姆达
M	μ	mu	米尤
N	ν	nu	纽
Ξ	ξ	xi	克西
O	o	omicron	奥密克戎
Π	π	pi	派
P	ρ	rho	柔
Σ	σ	sigma	西格马
T	τ	tau	陶
Υ	υ	upsilon	宇普西隆
Φ	ϕ	phi	斐
X	χ	chi	喜
Ψ	ψ	psi	普西
Ω	ω	omega	奥米伽

后　记

本书主要是根据自学读者的学习需要，在总结以往解析几何教学经验的基础上，参照教育部新颁解析几何教学大纲而编写的。

本书的主要内容分为三个部分。第一部分是空间解析几何讲义。它系统地介绍了空间解析几何的基本内容。在坐标系的基础上，以向量代数为基本工具，着重讨论了平面和直线、二次曲面以及二次曲面的分类。第二部分是空间解析几何学习指导。它是密切配合讲义的内容而编写的。每章开头都有学习要点和基本要求。对讲义的内容进行了具体分析，一些重要的地方都作了详细的说明，使讲义中的一些概念和内容有所深化和扩充。为了帮助读者总结、概括所学的内容，每章后面都有小结。第三部分是空间解析几何习题解答。它包括仔细挑选出来的紧密配合讲义内容的300多道习题，类型较全，难易适当。每道习题都作了详细解答。有些习题还给出了不同的解法。

本书由郭卫中主编。陈润瀛参加编写了讲义第一章和第一、四、五章学习指导；张兴汉参加编写了讲义第二章和第二章学习指导；万福之参加编写了讲义第三章和第三章学习指导；孙伟志选编了习题，并作了习题解答。

本书在编写过程中，得到东北师范大学数学系和几何教研室的支持。还承蒙杨春田教授审阅了讲义部分的原稿，王家彦副教授审阅了学习指导部分的原稿，并绘制了全部插图。在此，谨表谢意。

限于编者水平，本书会有不当甚至错误之处，欢迎读者指正。

编　者

1981年8月

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝空间解析几何
作者＝
页数＝５０４
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝８７９６７９２３